Classe de terminale ES

Exercices de Mathématiques

Pourcentages

1 Donner le coefficient multiplicateur associé aux cas suivants :

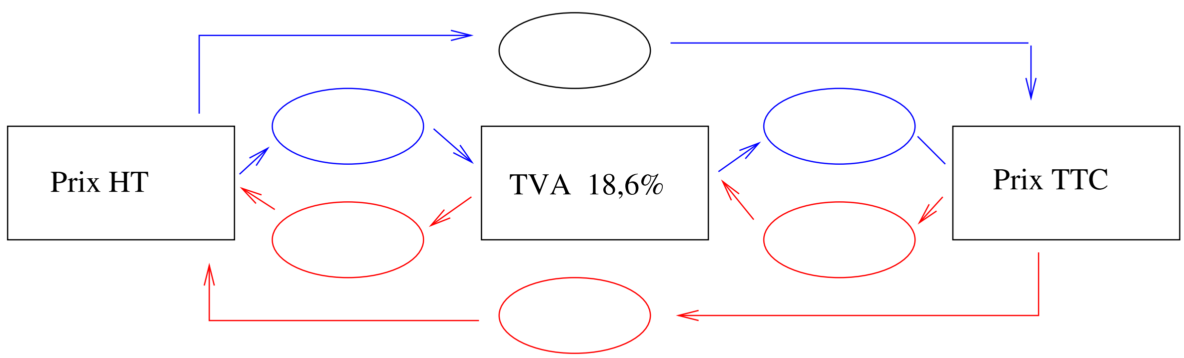
- 34% d'un prix.
- On augmente un prix de 18%.
- On baisse un prix de 24%.

2 Le montant de la TVA est de 18,6 %

a) Un article coûte 820 euros HT. Quel est son prix TTC ?

b) Un article coûte 628,58 euros TTC. Quel est son prix HT ?

c) Complétez le schéma suivant :



d) Sachant que le montant de la TVA est de 71,61 euros, calculer le prix HT et le prix TTC de l'article.

3 a) Un capital de 8000 euros est placé durant 3 ans au taux annuel de 4,25% à intérêts composés.

Calculer ce que devient ce capital au bout de 3 ans.

b) Un capital C est placé durant 3 ans au taux annuel de 4% à intérêts composés.

Sachant qu'au bout de ces trois années, on retire la somme de 22 050 euros, quel est le montant du capital initial ?

c) Un capital de 20 000 euros est placé à intérêts composés, durant deux ans, on retire alors la somme de 22 050 euros.

Quel est le montant du taux d'intérêt ?

4 Au 31 décembre 1990, le taux de TVA était de 20,5%. Au 1 janvier 1991, il est passé à 18,6%.

Un objet coûtait 6302,15F TTC au 31 décembre 1990. Calculer l'économie réalisée par un acheteur qui a attendu le 2 janvier pour acquérir cet objet.

5 Un objet coûtait 180 euros. Il est augmenté de 5%.

Le mois suivants, pour les soldes, il bénéficie d'un rabais. Il coûte alors 151,2 euros.

Quel est le pourcentage de rabais ?

6 Le tableau ci-dessous donne les prix en euros d'un objet de 1998 à 2002.

Année	1998	1999	2000	2001	2002
Prix	25,5	27	27,2	27,4	29
% d'évolution					
Indice base 1998					
Indice base 2000					

a) Calculer les pourcentages d'évolution.

b) Calculer les indices des prix, d'abord en choisissant l'année de référence 1998, puis l'année de référence 2000.

7 En 2000, la TVA sur les travaux est passée de 19,6% à 5,5%.

Pour la construction d'un mur, M. Machin avait un devis de 2400 euros.

Combien devra-t-il payer maintenant compte tenu de la baisse de TVA ? (On arrondira le résultat à l'euro près).

8 Rappel : $I_{b/a}$ désigne l'indice de l'année b avec pour base l'année a.

$$I_{a/b} = \frac{10000}{I_{b/a}}$$
$$I_{a/b} = (I_{a/c} \times I_{c/b}) : 100$$

Compléter le tableau suivant :

Année	1998	1999	2000	2001	2002
Indice base 1998	100	103	106	111	117
Indice base 2002					
% d'évolution					
Prix			2200		

9 Une lessive est vendue habituellement, dans les magasins A et B par barils de 5 kg, au prix de 12 euros le baril.

1°) Cette lessive est en promotion dans ces deux magasins.

a) Dans le magasin A, on fait une réduction de 10% sur le prix du baril. Dans le magasin B, on offre 10% de produit gratuit en plus pour l'achat d'un baril.

Déterminer où il est plus avantageux d'acheter cette lessive.

2°) Même question si, dans le magasin A, on fait une réduction de 20% et dans le magasin B, on offre 25% de produit gratuit en plus.

10 Pour engager de stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection.

Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves, il y a 60% de garçons. Après avoir pris conaissance des résultats, l'entreprise engage 70% des garçons candidats et 80% des filles candidates.

a) Quel est le pourcentage de garçons retenus parmi l'ensemble des candidats ?

b) Quel est le pourcentage de filles retenus parmi l'ensemble des candidats ?

11 Une banque propose un placement à 3,5%. La publicité affirme : votre capital double en 20 ans. Qu'en pensez-vous ? Justifiez.

12 Dans une ville, il y a un lycée polyvalent et un lycée technique.

Le lycée polyvalent compte 62% de filles parmi les élèves alors que le lycée technique en compte seulement 34%.

Pourtant il y a le même nombre de filles dans les deux lycées.

Peut-on dire quel lycée a le plus d'élèves ? Justifiez.

Systèmes d'équations

13 Résoudre les systèmes d'équations suivants :
1°) Par le calcul.
2°) Graphiquement.

$$\begin{cases} 5x - 7y = 19 \\ -3x + 4y = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 5y = 21 \\ 3x - 7y = -29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x - 3y = 39 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases}$$

14 Résoudre les systèmes suivants en utilisant un changement de variables.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 6 \\ x^2 + 4y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 8 \\ 3\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 0 \\ -\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = -5 \end{cases}$$

15 Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 7 \\ \qquad 3y - 7z = 1 \\ \qquad\qquad 8z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 3y - z = -4 \\ 4x + y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y + 7z = 20 \\ 3x - y + 3z = 10 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{cases}$$

16 Sam dépense 3,98 euros pour 6 croissants et 2 brioches.

Il lui faudrait 0,76 euros de plus pour acheter 2 croissants et 6 brioches.

Quel est le prix d'un croissant ? d'une brioche ?

17 En augmentant de 4 cm le côté d'un carré, on augmente l'aire de 56 cm^2.

Quel était le côté du carré ?

18 On fond un alliage contenant 45% d'argent avec un alliage contenant 60% d'argent pour obtenir 40 kg d'un alliage contenant 48% d'argent.

Quelles sont les masses d'argent fondues ?

19 Déterminer deux nombres entiers naturels connaissant leur différence 365 et leur quotient $\frac{4}{9}$.

20 Une somme d'argent est placée à intérêts composés durant 2 ans au taux de 5%.

Au bout de deux ans on retire la somme totale soit 9261 euros.

Quelle était la somme de départ ?

21 Trois enfants désirent connaître leur poids à l'aide d'une vieille bascule dont l'aiguille ne descend pas en dessous de 50 kg. Ils montent deux par deux sur le plateau et notent :

Alain et Bernard : 60 kg.

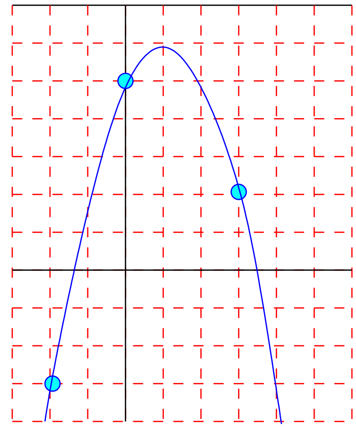
Alain et Claude : 65 kg.

Bernard et Claude : 75 kg.

Quel est le poids de chaque enfant ?

22 On a tracé dans un repère orthonormé la courbe C_f représentative de la fonction f définie sur IR par $f\,(x) \;=\; ax^2 \;+\; bx \;+\; c$.

Déterminer les réels a, b et c sachant que la courbe C_f passe par les points A , B et C.



Programmation linéaire

22 Un artisan joailler doit fabriquer des bracelets or et argent de deux types A et B.

Les consignes de fabrication sont :

• Chaque bracelet doit contenir 10 g d'or.

• Un bracelet de type A doit contenir 20 g d'argent et être décoré de 10 éclats de diamant.

• Un bracelet de type B nécessite 50 g d'argent et 40 éclats de diamant.

• Pour cet ouvrage, le joailler reçoit 207 g d'or, 600 g d'argent et 450 éclats de diamant.

• Il ne dispose que de 46 heures de travail.

1°) Sachant qu'un bracelet de type A lui demande 3 h de travail et un bracelet de type B, 2 heures de travail, écrire l'ensemble des contraintes de fabrication sous forme d'un système d'inéquations. (On désigne par x, le nombre de bracelets de type A et par y le nombre de bracelets de type B).

2°) Représenter graphiquement ces contraintes. (unité : 0,5 cm.)

3°) Le travail de l'artisan est rémunéré de la façon suivante : 200 euros pour la fabrication d'un bracelet de type A, 270 euros pour la fabrication d'un bracelet de type B.

Il doit rendre la matière première non utilisée.

a) Quel nombre de bracelet de chaque type doit-il fabriquer pour obtenir le meilleur salaire ? A combien s'élève alors son salaire horaire ?

b) Quelle quantité de matière première doit-il redonner ?

23 Un artisan fabrique des objets A et des objets B.

La réalisation d'un objet A demande 30 euros de matière première et 125 euros de main d'oeuvre ; celle d'un objet B demande 70 euros de matière première et 75 euros de main d'oeuvre.

Pour une bonne gestion de l'entreprise, les dépenses journalières en matière première et en main d'oeuvre ne doivent pas dépasser respectivement 560 euros et 1250 euros.

Les profits réalisés sont de 54 euros par objet A et de 45 euros par objet B.

On désigne par x et y les nombres d'objets A et B fabriqués par jour.

1°) Etablir le système d'inéquations des contraintes.

2°) Représenter graphiquement ce système.

3°) Après avoir calculé en fonction de x et y le profit journalier P réalisé, déterminer le nombre d'objets A et B que l'entreprise doit produire pour réaliser un bénéfice maximal.

24 Un directeur de chenil veut nourrir ses chiens au moindre coût en leur apportant cependant une minimum journalier de 120 kg de protides, 90 kg de lipides et 60 kg de glucides.

Deux aliments tout préparés CANI et NICA lui sont proposés.

• Un sac de CANI contient 3 kg de protides, 3kg de lipides et 1 kg de glucides. Il coûte 12 euros

• Un sac de NICA contient 2 kg de protides, 1 kg de lipides et 2 kg de glucides. Il coûte 6 euros.

Combien de sacs de chaque catégorie, le directeur va-t-il commander chaque jour. Combien celà lui coûtera-t-il ?

25 Un marchand de glaces vend des glaces en cornets, les unes à une boule, les autres à deux boules.

Chaque jour, le marchand dispose de 60 cornets à une boule et de 60 cornets à deux boules.

Il vend au plus 100 cornets par jour et il dispose d'une quantité de crême glacée lui permettant de faire 150 boules par jour.

Le bénéfice réalisé est de 0,2 euros pour un cornet à une boule et de 0,5 euros pour un cornet à deux boules.

Déterminer le bénéfice maximal qu'il peut espérer faire en un jour.

Les suites : généralités

26 Calculer les 5 premiers termes des suites suivantes :

1°) $u_n = 2n^2 - 3n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2°) $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3°) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

4°) $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

27 Etudier le sens de variation des suites suivantes :

1°) $u_n = 2n^2 - 3n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2°) $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3°) $u_n = 2^n \times 3^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

4°) $u_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

5°) $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = n + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

28 Soit (u_n) la suite de terme général

$u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$

1°) Calculer u_n pour $0 \leq n \leq 5$.

2°) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

3°) Montrer que (u_n) est majorée par 2.

29 (u_n) est la suite définie par $u_n = n^2 - 2n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Montrer que u_n est minorée par -5.

30 Soit la suite définie par u_0=1 et

$u_n = \dfrac{2}{3}u_{n-1} + 2$

a) Calculer les cinq premiers termes de cette suite.

b) Tracer les droites d'équation $y = \dfrac{2}{3}x + 2$ et y=x.

c) Représenter graphiquement les termes de la suites (u_n).

d) Quel semble être le sens de variation de cette suite ? et sa limite ?

Suites arithmétiques et géométriques

31 a) Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Calculer u_1, u_2 et u_{10}. puis $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$.

b)Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Calculer v_1, v_2 et v_{10}. puis $v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{10}$.

32 a) Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_4 = 35$ et $u_2 = 15$.

Calculer la raison r et le premier terme u_0.

b) Soit (v_n) une suite géométrique telle que v_2=5 et $v_4 = 7,2$.
Calculer v_4 et $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.

33 Calculer les sommes suivantes :

a) S=1+3+5+7+...+99.
S'=2+4+6+8+...+100.

En déduire la somme :
S"=1-2+3-5+...+99-100.

b) $T = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{10}$.

34 Un capital de 12000 euros est placé à intérêts composés aux taux de 4%.

Quelle est sa valeur acquise au bout de 10 ans ?

Au bout de combien de temps, ce capital aura-t-il doublé ?

35 Quel capital faut-il placer à 8% avec capitalisation annuelle pour que la valeur acquise au bout de 10 ans soit 100000 euros ?

36 On considère la suite réelle (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 4$ et par la relation :

$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ pour tout $n \geq 1$.
1°) Calculer u_1, u_2, u_3.

2°) On pose $v_n = u_n - 3$ pour tout $n \geq 0$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Calculer v_0 et montrer que $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.

c) En déduire v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

37 Une personne loue une maison à partir du 1^{er} janvier 2000.

Elle a le choix entre deux formules de contrat.

Le loyer initial est de 1000 euros et le locataire s'engage à occuper la maison six années complètes.
<u>Contrat 1 :</u> Augmentation annuelle de 10%

On note u_0 le loyer annuel pour 2000, u_n le loyer annuel pour l'année (2000+n).

a) Calculer u_{n+1} en fonction de u_n.

b) En déduire u_n en fonction de n.

c) Calculer u_5 (arrondi au centième).

d) Calculer la somme payée à l'issue des six années.

<u>Contrat 2 :</u> Augmentation annuelle de 110 euros.

On note v_0 le loyer annuel pour 2000, v_n le loyer annuel pour l'année (2000+n).

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.

b) En déduire v_n en fonctionde n.

c) Calculer v_5 (arrondi au centième).

d) Calculer la somme payée à l'issue des six années.

Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ?

38 Harpagon place un capital de 10 000 euros au taux annuel de 10% en intérêts simples.

Onc'Picsou place aussi 10 000 euros à 10% mais avec intérêts composés et capitalisation annuelle.

Soient h_n et p_n les avoirs respectifs d'Arpagon et d'Onc'Picsou après n années d'épargne.

a) Calculer h_1, h_2, h_3 et p_1, p_2, p_3.

b) Montrer que la suite (h_n) est arithmétique. En déduire h_n en fonction de n. Calculer h_{10}.

c) Montrer que la suite (p_n) est géométrique. En déduire p_n en fonction de n. Calculer h_{10}.

d) Comparer les deux systèmes d'épargne.

39 Une compagnie minière effectue un forage.

Les crédits débloqués sont de 46 800 euros. L'étude du devis montre que le coût du premier mètre de forage est de 100 euros, que celui du second mètre est de 140 euros, celui du troisième mètre 180 euros etc...

Jusqu'à quelle profondeur peut-on creuser en utilisant les crédits alloués ?

40 On laisse tomber une balle d'une hauteur de 2 mètres sur un sol horizontal sur lequel, elle rebondit aux deux tiers de la hauteur précédante.

Soit h_n la hauteur du n^{ieme} rebond.

A partir de quelle valeur de n aura-t-on $h_n < 2$ mm ?

On admet qu'à ce moment-là, elle s'immobilise.

Quelle distance aura-t-elle parcourue depuis qu'elle a été lâchée ?

Equations du second degré

41 Résoudre les équations suivantes :

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$16x^2 - 40x + 25 = 0$

$3x^2 + 2x + 1 = 0$

$-3x^2 + 4x - \frac{4}{3} = 0$

42 Factoriser les polynômes suivants :

$P(x) = x^2 + 5x - 14$

$P(x) = 3x^2 + 2x + 5$

$P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$

$P(x) = x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{49}{9}$

43 Résoudre les inéquations suivantes :

$2x^2 - 11x + 9 \leq 0$

$x^2 - x + 3 > 0$

$-x^2 + 6x - 9 \geq 0$

$(4x - 3)(-5x^2 + 2x + 7) \leq 0$

44 Utiliser un changement de variables pour résoudre les équations suivantes :

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$

45 Une école a loué un autocar pour une excursion scolaire pour un forfait de 2300 F.

Au départ, il y a défection de 6 élèves et chacun des partants doit payer 7,5 F de plus.

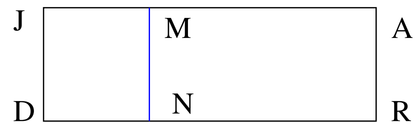
Quel est le nombre d'élèves qui participent à l'excursion ?

46 Un particulier place un capital de 30 000 euros.

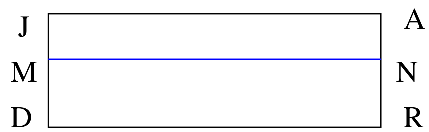
Après un an, il retire le capital et les intérêts produits et place le tout à un taux d'intérêt supérieur de 3% au premier.

Un an après, il retire 3210 euros d'intérêts.
Déterminer le premier taux.

47 Un jardin JARD rectangulaire de 1200 m^2 est clôturé et partagé en deux par un segment [MN] parallèle à deux côtés (deux possibilités sont à considérer).



ou



Il faut 180 m de grillage pour entourer le jardin et faire la séparation [MN].

Déterminer, dans chaque cas, les dimensions de ce jardin

48 En augmentant de 3 cm le rayon d'un disque, son aire a augmenté de 69%.

Quel était le rayon du disque initial ?

49 Un homme achète un cheval qu'il revend au bout de quelques temps pour 24 Louis.

A cette vente, il perd autant pour cent que le cheval lui avait coûté.

Quel était le prix d'achat ?

50 Deux automobilistes effectuent le même trajet de 400 km mais le second le fait à 20 km/h de plus que le premier et en une heure de moins.

Calculer la vitesse de chacun et le temps nécessaire pour parcourir le trajet.

51 Un bâteau descend une rivière sur un parcours de 29 km puis la remonte sur 28,5 km.

Le voyage dure 5 heures.

La vitesse du courant est de 2,5 km/h.

Quelle est la vitesse propre de ce bâteau ?

52 La grande base d'un trapèze mesure 3 fois plus que la petite base.

La hauteur de ce trapèze mesure 2 fois plus que la petite base.

L'aire de ce trapèze est 36 cm^2.

Calculer la longueur des bases et de la hauteur de ce trapèze.

53 Par chemin de fer, la distance de Paris à Bordeaux est de 588 km.

Un train parcourt ce trajet à une vitesse moyenne inconnue.

Si l'on augmente de 14 km/h cette vitesse moyenne, on diminue de 1 heure le temps du trajet.

Calculer la vitesse moyenne du train.

54 En augmentant de 5 mm les côtés d'un carré, son aire a augmenté de 21%.

Combien mesurait le côté initial ?

55 Déterminer deux nombres qui diffèrent de 1 et dont la somme est égale au produit.

56 Un jardin rectangulaire de 112 m^2 est entouré par une clôture de 44 m de long.

Déterminer sa longueur et sa largeur.

57 Soit $f(x) = x^2 - 5x + 1$.

a) Calculer les images par f de 0 ; 1 ; -2 ; $\frac{5}{2}$ et $-\frac{3}{2}$

b) Déterminer les antécédants de 0 ; -4 ; 1 et $-\frac{21}{4}$

58 a) Construire les représentations graphiques C et D des fonctions :

$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 3 - 2x$

b) C et D se coupent en deux points E et F. Calculer leurs coordonnées.

59 Résoudre l'inéquation :

$$\frac{-9x^2 + 5x + 4}{7x^2 - 4x - 3} < 0$$

60 Résoudre l'équation :

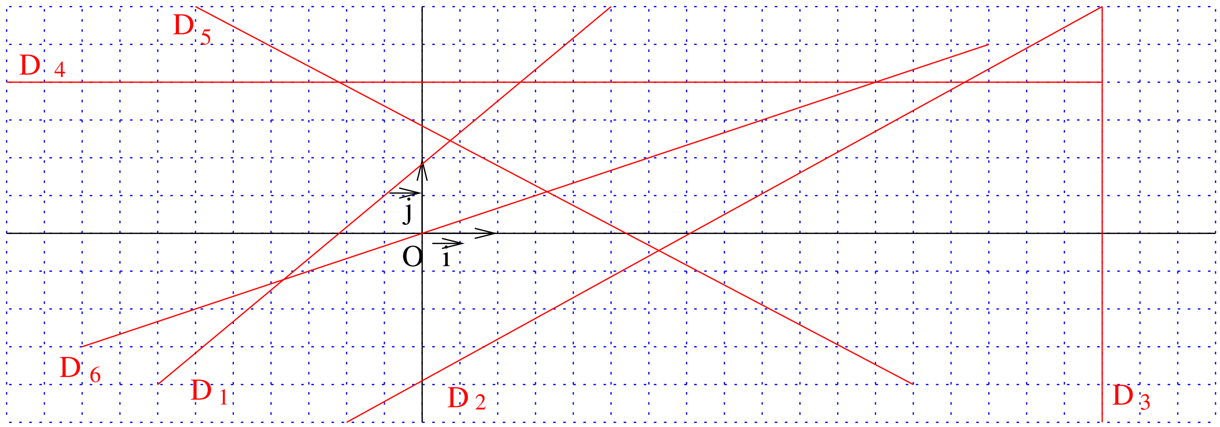
$$\frac{1}{x^2 - 9} + \frac{2}{x - 3} + \frac{3}{x + 3} = 1$$

61 Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Equations de droites

62 Par lecture graphique, donner une équation de chacune des droites dans le repère repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



63 Soit la droite D d'équation : $y = 3x - 2$.

Est-ce que les points A(3 ;2) ; B(1 ;1) ; C(5 ;13) et E(0 ;0) appartiennent à la droite D ?

64 Les points A(a ;2) ; B(-1 ;b) ; C(c ;-5) et D($\sqrt{3}$;d) sont sur la droite Δ d'équation $y = 5x + 2$.

Calculer a, b, c et d puis tracer la droite Δ.

65 Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, tracer les droites suivantes :

$D_1: \ y = 2x - 3$ $\qquad$ $D_2: \ y = -3x + 1$

$D_3: \ y = 2$ $\qquad$ $D_4: \ x = 5$

$D_5: \ y = -2x$ $\qquad$ $D_6: \ y = 1 - x$.

Pour chaque droite, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

66

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) et l'écrire sous la forme ax+by=0 avec

a) A(1 ;3) et B(-1 ;1)

b) A(3 ;-1) et B(-4 ;1)

c) A(1 ;2) et B(3 ;2).

67 Déterminer une équation cartésienne de la droite de coefficient directeur m qui passe par le point A pour

a) m=1 et A(2 ;-1)

b) m=$-\frac{1}{3}$ et A$(-\frac{3}{2};\frac{1}{6})$.

68 Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ et un point A des droites suivantes, puis les tracer.

$D_1: \ x + y - 1 = 0$ $\qquad$ $D_2: \ -3x + y + 5 = 0$

$D_3: \ y = -x + 3$ $\qquad$ $D_4: \ x = 3y - 1$

$D_5: \ y = 2$ $\qquad$ $D_6: \ x = -3$.

69 Parmi les droites suivantes, déterminer celles qui sont parallèles ou perpendiculaires.

$D_1: \ 6x - 4y + 3 = 0$ $\qquad$ $D_2: \ 3x - 2y + 1 = 0$

$D_3: \ 2x + 3y - 3 = 0$ $\qquad$ $D_4: \ y = \frac{2}{3}x + 5$

$D_5: y = -\frac{3}{2}x - 2$ $\qquad$ $D_6: \ 3x + y - 7 = 0$

70 a) Déterminer une équation de la droite Δ_1 passant par A(3 ;2) et B(-1 ;5).

b) Déterminer une équation de la droite Δ_2 passant par C(3 ;2) et de coefficient directeur -3.

c) Déterminer une équation de la droite Δ_3 passant par D(3 ;-2) et E(3 ;4).

d) Déterminer une équation de la droite Δ_4 passant par E(5 ;1) et F(2 ;1).

e) Déterminer une équation de la droite Δ_6 passant par G(1 ;2) et parallèle à la droite d'équation $y = \frac{2}{5}x - 3$.

f) Déterminer une équation de la droite Δ_6 passant par H(-3 ;2) est perpendiculaire à la droite d'équation $y = -2x + 1$.

Devoir n°1

I Compléter le tableau :

année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
P.I.B indice	1195 100	1201	1322	1250	1331	1535	1554	1406	1447	1432
variation										

Calculer le pourcentage d'évolution du PIB par rapport à celui de l'année 1990 pour les années 1991, 1992 et 1993.

Calculer le pourcentage d'évolution du PIB de l'année 1993 par rapport à celui de l'année 1992.

II L'entreprise Nostrada SA vend des pierres philosophales.

Le tableau ci-dessous donne (en milliers d'euros) l'évolution de son chiffre d'affaire :

1998	1999	2000	2001
12512	19789	25043	23015

Construire le tableau d'indice correspondant au chiffre d'affaires de l'entreprise de 1998 à 2002 (base 100 en 1998).

Quel est le pourcentage d'augmentation du chiffre d'affaires entre 1998 et 1999 ?

Quel est le pourcentage d'augmentation du chiffre d'affaires entre 1998 et 2001 ?

Quel est le pourcentage d'augmentation du chiffre d'affaires entre 2000 et 2001 ?

Bac Amérique du Nord 1998

Le tableau suivant donne le montant des cotisations qu'ont eu à payer en 1997 les adhérents à une médiathèque, selon la catégorie à laquelle ils appartiennent :

Adhérents	Catégories	Cotisation
Résidents	catégorie A : scolaires	gratuit
	catégorie B : étudiants	60 F
	catégorie C : autres	100 F
Non résidents	catégorie D	140 F

La recette totale de la médiathèque se compose :

- d'une subvention municipale.
- des cotisations des adhérents.

En 1997

- la subvention municipale a été de 200 000 F.
- il y a eu au total 5 000 adhérents, dont 72% de résidents.
- parmi les résidents, 45% appartiennent à la catégorie A et 30% à la catégorie B.

a) Combien y a-t-il eu d'adhérents dans chaque catégorie ?

b) Quelle a été la recette totale ?

En 1998 :

- pour équilibrer le budget, la recette totale doit augmenter de 10%
- la subvention municipale est augmentée de 3%.

a) Montrer que pour équilibrer le budget, la part de la recette totale provenant des cotisations en 1998 doit être égale à 399 880 F.

b) Le nombre d'adhérents augmente en 1998 de 10% dans chaque catégorie.

On modifie uniquement les cotisations des catégories C et D ;la cotisation de la catégorie C passe à 105 F.

Calculer, à 10 F près par excès, la cotisation minimale de la catégorie D pour que la part de la recette provenant des cotisations en 1998 soit au moins de 399 880F.

c) Calculer dans ces conditions les pourcentages d'augmentation des cotisations des catégories C et D entre 1997 et 1998.

Devoir n°2

I Résoudre les systèmes d'équations suivants (Pour le troisième, effectuer un changement de variable) :

$$\begin{cases} 4x - 12y = 4 \\ 7x - 21y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + (\sqrt{2} - 1)y = 1 \\ (\sqrt{2} + 1)x + y\sqrt{2} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 6 \\ x^2 + 4y^2 = 25 \end{cases}$$

II Un nombre de trois chiffres a, b et c peut s'écrire : $abc = a \times 100 + b \times 10 + c$
Par exemple : $358 = 3 \times 100 + 5 \times 10 + 8$

Déterminer un nombre de trois chiffres sachant que :

- La somme de ses chiffres est égale à 18.
- Si l'on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines, le nombre augmente de 180.
- Si l'on permute le chiffre des unités et celui des centaines, le nombre diminue de 495.

III Le responsable d'une cantine scolaire doit acheter au minimum 70 assiettes plates et 40 assiettes creuses.

Deux grossistes proposent :
- l'un, le lot A de 10 assiettes plates et 10 assiettes creuses pour 15 €.
- l'autre, le lot B de 20 assiettes plates et 10 assiettes creuses pour 20€.

On se propose de déterminer le nombre x de lots A et le nombre y de lots B que le responsable doit acheter pour que la dépense soit minimale.

Montre que les contraintes peuvent se traduire par le système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ x + 2y \geq 7 \end{cases}$$

Détermine graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées x et y vérifient le système (on hachurera la partie qui ne convient pas) unité du repère : 2 cm.

a) Exprime en fonction de x et y la dépense occasionnée par l'achat de x lots A et de y lots B.

b) Les couples occasionnant une même dépense C sont représentés par une droite Δ.

Tracer cette droite pour C = 120€.

c) Détermine graphiquement le point par lequel doit passer la droite Δ pour que la dépense soit minimale.

En déduire le nombre de lots A et le nombre de lots B correspondants.

Quelle est alors cette dépense minimale ?

Devoir n°3

I

1) Étudier la monotonie des suites suivantes (en calculant $u_{n+1} - u_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

a) $u_n = n - n^2$

b) $u_n = \frac{2^n}{n}$ $(n \geq 2)$

c) $u_n = 4 \times \frac{3^{n+1}}{2^n}$

d) $u_n = -5\frac{2^{n-1}}{5^n}$

II

Les suites suivantes sont arithmétiques :

Calculer la raison et le premier terme u_0 puis calculer u_{30} pour les suites suivantes :

a) $u_5 = 3$ et $u_{15} = -27$

b) $u_{20} = -52$ et $u_{51} = -145$

III

Les suites suivantes sont géométriques

Calculer la raison et le premier terme de ces suites (il peut y avoir plusieurs réponses possibles pour chacun des a) et b)

Pour chacun de ces cas, calculer u_{30} :

a) $u_3 = -48$ et $u_9 = -3072$

b) $u_{10} = 8$ et $u_7 = -1$

IV

Calculer les sommes suivantes (à vous de voir s'il s'agit de suites arithmétiques ou géométriques).

a) $S_1 = 18 + 54 + 162 + ... + 39366$

b) $S_2 = -5 + 2 + 9 + ... + 65$

Devoir n°4

I A l'aide des données fournies pour chacune des suites suivantes, répondez à la questions posée :

a) $u_n = -5$ si n est impair et $u_n = 5$ si n est pair ; la suite est-elle géométrique ?

b) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = n \times u_n$; la suite est-elle géométrique ?

II a) $u_5 = 729$; $q = -3$, calculez u_{10} et u_0

b) $u_0 = 1$; $u_7 = 128$, calculez q.

c) $u_4 = 44$; $u_{10} = 352$, calculez u_{13} (la raison est positive).

d) $w_0 = 2$ et $w_2 = 18$, calculez w_{10}.

III Calculer les sommes suivantes :

1° $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \text{.........} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{1998}$ 2°)
$S = (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \text{......} + (-x)^{17}$

3°) $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \text{.....} + \frac{1}{14348907}$

IV
Montrez que la suite $(u)_n$, définie pour tout naturel n par $u_n = \frac{1}{n+2}$ est strictement décroissante.

Est-ce une suite géométrique ?

V
Etudiez les variations de la suite u définie pour tout naturel n par : $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$.

Est-ce une suite géométrique ?

VI On place un capital de 100 000 francs à 7 % par an (intérêts composés).

1°) De combien dispose-t-on au bout de quatre ans ? au bout de dix ans ?

2°) Combien d'années sont nécessaires pour voir le capital doubler ? pour le voir tripler ?

VII Deux propositions sont offertes pour placer une somme de 5 000 €.

Le premier placement est rémunéré à intérêts simples à un taux annuel de 5% du capital initial. On note u_n la somme totale obtenue au bout de n années.

Le second placement est rémunéré à intérêts composés à un taux annuel de 4,5 %. On note alors v_n la somme totale obtenue au bout de n années.

1°) Que valent u_0 et v_0 ?

2°) a) Déterminer u_n en fonction de n.

b) Déterminer v_n en fonction de n.

3°) Quel placement choisir si l'on décide d'immobiliser son argent pendant 5 ans ? 6 ans ?

VIII Soit la suite u définie par $u_o = 1$;
$un + 1 = \frac{2u_n}{3} + 1$ pour tout n entier.

1°) . Calculer les quatre premiers termes de la suite u.

Montrer que ce n'est pas une suite géométrique.

2°). La suite v est définie par : $v_n = u_n - 3$, pour tout n entier.

Montrer que la suite v est géométrique.

3°). Déterminer vn en fonction de n, puis un en fonction de n.

4°). Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \text{....} + u_n$ en fonction de n.

Devoir n°5

Exercice 1. (5 points)

Le 1er janvier 2002, René a placé 5000 euros à intérêt composés au taux annuel de 3%. (Cela signifie que les intérêts ajoutés au capital chaque nouvelle année sont égaux à 3% du capital de l'année précédente). On note C_n le capital de René disponible au 1er janvier de l'année 2002+n.

1. Calculer les valeurs exactes de C_1 et C_2.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et montrer que C_n peut s'écrire : $C_n = 1,03^n \times 5000$.
3. Préciser le sens de variation de la suite (C_n).
4. Au 1er janvier 2010, René aura besoin d'une somme de 7000 euros. Son capital sera-t-il alors suffisant pour subvenir à cette dépense ?
5. Quel nombre minimal d'années devra-t-il attendre pour retirer un capital de 7000 euros ?

Exercice 2. (10 points)

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{4}{x})$.

1. (a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (On ne demande pas les limites).
   (b) En déduire que si $2 \leq x \leq 4$, alors $2 \leq f(x) \leq 4$.
2. On définit la suite (u_n) explicitement par $u_n = f(n)$, pour tout entier n tel que $n > 0$.
   (a) Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
   (b) A l'aide de la question 1, étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. On définit la suite récurrente (v_n) par : $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{4}{v_n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$.
   (a) Vérifier que $2 \leq v_1 \leq 4$.
   (b) A l'aide de la question 1, montrer que si $2 \leq v_n \leq 4$ alors $2 \leq v_{n+1} \leq 4$.
   (c) On admet que le terme général v_n vérifie $2 \leq v_n \leq 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Exprimer la différence $v_{n+1} - v_n$ en fonction de v_n.
   Etudier le signe de la différence $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n.
   En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
   (d) Quelle conjecture peut-on former sur la convergence de la suite (v_n) ?

Exercice 3. (5 points)

La suite (d_n) est définie par $\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = \sqrt{1 + (d_n)^2} \end{cases}$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite.
2. Vérifier que tous les termes d_n sont positifs.
3. Vérifier que la suite (d_n) n'est ni géométrique ni arithmétique.
4. On pose $u_n = (d_n)^2$. Montrer que la suite (u_n) est arithmétique.
5. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.
6. Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $\sqrt{n} \leq d_n \leq n$. En déduire la limite de la suite (d_n).

Révisions sur les dérivées

1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x - 5$

$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

$f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 5x - 8$

$f(x) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{2}{7}x^2 - 6x + \frac{1}{3}$

f(x)= $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3}$

$f(x) = (x-2)\sqrt{x}$

$f(x) = (x^3 - 5x^2 + 1)(2x^4 - 6x + 8)$

$f(x) = \frac{1}{3x-2}$

$f(x) = -\frac{5}{2x^2 - 3x + 7}$

$f(x) = \frac{3x-5}{2x+4}$

$f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{4x^2 - 1}$

$f(x) == \frac{6x+2}{3x+2}$

$f(x) = (2x-3)^2$

2 Soit la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe de f aux points d'abscisses 0 et 3.

b) Déterminer l'abscisse des points de la courbe de f qui admettent une tangente de coefficient directeur 2.

c) Déterminer les points de la courbe de f qui admettent une tangente parrallèle à la droite d'équation $y = -2x - 1$.

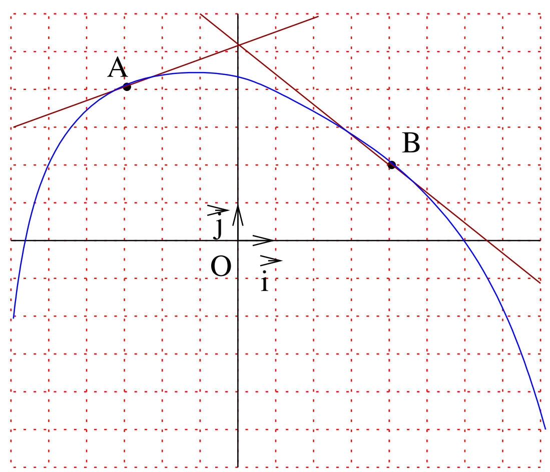
d) Déterminer les points de la courbe de f qui admettent une tangente horizontale.

3 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.

a) Déterminer le coefficient directeur des tangentes à cette courbe aux points A et B.

b) En déduire f'(-3) et f'(4).

c) Ecrire l'équation de ces tangentes.



Révisions sur les limites

4 Soit la fonction f(x)=$\dfrac{x}{x^2-1}$.

Compléter le tableau suivant :

x	1,1	1,01	1,001	1,00001	0,9	0,99	0,9999	$1-10^{-10}$	1+10^{-10}	$1+10^{-100}$
f(x)										

5 Déterminer les limites suivantes et donner l'équation de l'asymptôte à la courbe que l'on peut déduire de cette limite.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6-4x+1}{1-x^4} \qquad \lim_{x\to5}(2x^3+5x^2-x+1) \qquad \lim_{x\to1}\frac{x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to0}(x+\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{1-x} \qquad \lim_{x\to3^+}\frac{2x^2+x-1}{x-3} \qquad \lim_{x\to-1}\frac{x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3-4x^2}{3+2x^2} \qquad \lim_{x\to3^-}\frac{2x^2+x-1}{x-3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-1}{(x-1)^2} \qquad \lim_{x\to1}\frac{x}{\sqrt{x-1}} \qquad \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

6 Soit la fonction f(x)=$2x-3+\dfrac{x+1}{x+2}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2°) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

3°) En déduire l'équation de l'asymptôte verticale.

4°) Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x)-(2x-3)$.

5°) En déduire une équation de l'asympôte oblique.

7 Soit la fonction f(x)=$\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2°) Calculer a,b,c tels que f(x)=$ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

3°) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

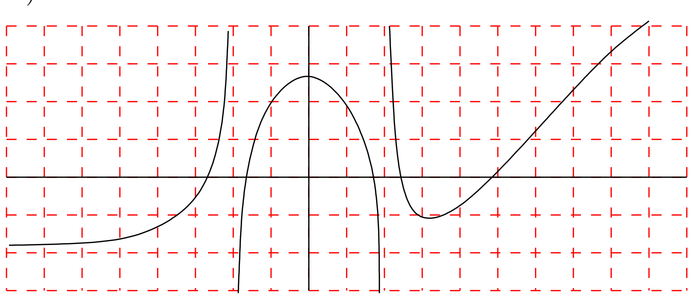
4°) Soit y=x-1. Calculer la limite de $f(x)-y$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

5°) Conclure sur les asymptôtes.

8 La courbe de la fonction f ci-dessous a des asympôtes.

1°) Tracer et donner l'équation de ces asymptôtes.

2°) En déduire les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

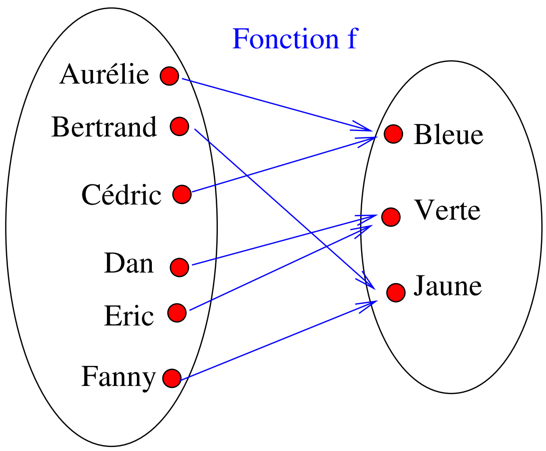


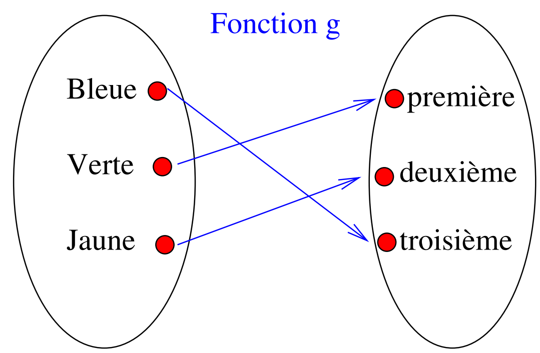
Fonctions composées

9 Soit A l'ensemble des prénoms d'un groupe d'amis qui participent à un tournoi sportif. Soit B la couleur des équipes et C le classement à l'issue des matchs.

On appelle f la fonction qui a chaque personne fait correspondre la couleur de son équipe. On appelle g la fonction qui à chaque équipe fait correspondre son classement. g$\circ$ f sera donc la fonction qui a chaque personne fait correspondre son classement.

A l'aide des diagrammes de f et de g, tracer le diagramme de g$\circ$ f.





10 Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ pour les fonctions suivantes :

1°) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 2x + 1$

2°) $f(x) = \frac{1}{x}$. et $g(x) = 2x + 1$

3°) $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1)$

4°) Est-ce que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont égales ?

11 Soit $a(x) = x^2$ $b(x) = 3x + 1$ $c(x) = \frac{1}{x}$ $d(x) = \sqrt{x}$.

Ecrire les fonctions suivantes comme composées des fonctions a, b, c et d.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad g(x) = 3 \times \frac{1}{x} + 1$$
$$h(x) = (3x+1)^2 \qquad k(x) = 3x^2 + 1$$
$$l(x) = \sqrt{x^2} \qquad m(x) = \frac{1}{3x+1}.$$

12 1°)Rappeler l'ensemble de définition et le sens de variation des fonctions usuelles :

$$f(x) = ax + b \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = \sqrt{x}$$
$$j(x) = x^3 \qquad k(x) = \frac{1}{x} \qquad l(x) = |x|.$$

2°) Ecrire les fonctions suivantes comme composées de fonctions usuelles et en déduire leur sens de variation sur l'intervalle donné.

$A(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ sur $[0\,;+\infty[$.

$B(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ sur $]-\infty; 0]$.

$C(x) = \sqrt{2 - x}$ sur $]-\infty; 2]$.

$D(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1}$ sur $]-1; +\infty[$.

13 Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants :

$a)$	$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$	$g(x) = \frac{1}{x}$
$b)$	$f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = 3x - 2$
$c)$	$f(x) = 3x^2 - 5$	$g(x) = 2x + 4$

14 Décomposer les fonctions suivantes sous la forme $g \circ f$:

$h(x) = \sqrt{8x^2 - 5x + 1}$

$k(x) = 2 + (\frac{1}{x})^2 - \frac{3}{x}$

$l(x) = (3x^3 - 2x^2 + 8x - 2)^4$

15 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$h(x) = \sqrt{8x^2 - 5x + 1} \qquad k(x) = 2 + (\frac{1}{x})^2 - \frac{3}{x}$$
$$l(x) = (3x^3 - 2x^2 + 8x - 2)^4 \qquad f(x) = \frac{1}{(2x^2 - 6x - 5)^3}$$

16 Déterminer l'ensemble de définition puis calculer les limites aux bornes de cet ensemble.

$$h(x) = \sqrt{8x^2 - 5x + 1} \qquad k(x) = 2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{3}{x}$$
$$l(x) = (3x^3 - 2x^2 + 8x - 2)^4 \qquad f(x) = \frac{1}{(x^2 - 6x + 5)^3}$$

Etude de fonctions

17 Voici le tableau de variation d'une fonction numérique f :

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		$+$	0	$-$	||	$-$	-3	$-$	0	$-$	0	$+$	
f(x)	1	↗	3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↘	2	↘	-1	↗	0

1°) Donner les ensembles de définition de f et de f'.

2°) Quelles sont les limites de f ? Donner les équations des asymptôtes à la courbe

3°) Ecrire les équations des tangentes que le tableau permet de connaître.

4°) Tracer une esquisse de la courbe.

5°) Quel est le nombre de racines de l'équation f(x)=0. Donner un encadrement de chaque racine par deux entiers consécutifs.

18 Soit la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $x \to \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Etudier la parité de f.

c) Calculer f'(x) puis résoudrel'inéquation : $f'(x) \geq 0$.

d) En déduire les variations de f puis établir le tableau de variations.

e) Etudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

f) Déterminer les équation des tangentes à la courbe aux points d'abscisse -3 et 3.

g) Tracer en rouge les asympôtes à la courbe, en vert les tangentes et en gris la courbe de f.

19 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \to \dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et les limites de f(x) aux bornes de D_f.

2°) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout x de D_f

$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

3°) Vérifier que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptôte à la courbe (C) représentative de f. Quelle est l'équation de l'autre asymptôte ?

4°) Calculer la dérivée de f. En déduire le sens de variation de f.

5°) Construire la courbe (C) dans un repère orthonormé.

20 Donner la représentation graphique associée à chacun des tableau de variation suivants :

a)

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	‖	+	0	−	‖	+	0	−	
f(x)	3	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↘	0

b)

x	$-\infty$		2		4		5		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	‖	+	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	1

c)

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	+	0	−	
f(x)	-2	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

La droite d'équation $y = 5 - x$ est asymptôte à la courbe de f.

21 En économie, on admet souvent que le nombre d'objets n vendus diminue quand son prix de vente p, exprimé en francs, augmente.

Une des lois formulées est n=a-ep où a et b sont des constantes réelles (e>0).

Le montant des ventes v, exprimé en francs est tel que v=pn.

Un magasin vend 100 bouteilles de champagne par semaine à 60 francs la bouteille. Le directeur constate que chaque fois qu'il baisse le prix de la bouteille de 2 francs, il augment la vente hebdomadaire de 10 bouteilles.

Le magasin paie chaque bouteille 45 F au grossiste.

Quelles sont les valeurs des coefficients a et e.

2°) Exprimer le bénéfice b en fonction de p.

3°) Etudier les variation de la fonction b(p).

4°) En déduire le prix de vente d'une bouteille de champagne assurant un bénéfice maximal.

22 Soit f la fonction définie par f(x) = $\dfrac{2x^2-3x-10}{x-3}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1°) . Déterminer le domaine de définition de f.

2°) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel x différent de 3, f(x) $=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$

3°) Calculer la limites de f(x) - (2x + 3) en $+\infty$ et en $-\infty$

Donner une interprétation graphique du résultat.

4°) On note Δ_1 la la droite d'équation y = 2x + 3.

Etudier la position relative de C et de Δ.

5°) Déterminer les limites de f(x) pour $x \to 3$.

Donner une interprétation graphique du résultat.

23 f est la fonction définie sur $]-2\,;+\infty\,[$ par :
f(x) $=\dfrac{x^2-6x-7}{2x+4}$

C est la courbe représentant f dans un repère orthonormal (unité : 1 cm).

1°) Démontrer que la droite d'équation x $=-2$est asymptote à la courbe C.

2°) a) Vérifier que pour tout x >-2, f(x) = $\dfrac{x}{2}-4+\dfrac{9}{2(x+2)}$.

b) Etudier alors la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que la droite Δ d'équation $y=\dfrac{x}{2}-4$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$. 3°) a) Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(x)=\dfrac{(x+5)(x-1)}{2(x+2)^2}$.

b) Etudier le sens de variation de f sur $]-2\,;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]-2\,;+\infty[$.
Indiquer les extrema de f.

4°) a) Déterminer les racines du trinôme
P(x) $=x^2-6x-7$.

Déterminer alors les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

b) On note T_A la tangente à C au point A d'abscisse -1 et T_B la tangente à C au point B d'abscisse 7.

Déterminer une équation des tangentes T_A et T_B.

5°) Tracer C, ses asymptotes et ses tangentes aux points A et B.

24 Soit f, la fonction définie par
$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+6x$.

C est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unités 1 cm pour l'axe des abscisses, et 2 cm pour l'axe des ordonnées.

1°) Quel est l' ensemble de définition de la fonction f ?

2°) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3°) a. Calculer la dérivée de f.

b. Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3°) a. Montrer que l' équation f(x)=5 admet une solution unique dans l' intervalle [2 ; 4]

b. Donner une valeur de cette solution à 10^{-2} près par excès.

5°) a. Quels sont les points où la courbe admet une tangente horizontale ?

b. Calculer le nombre dérivé de f en 0. Quelle signification peut-on donner à ce résultat ?

6°) Tracer la courbe C ainsi que ces tangentes horizontales et sa tangente en 0.

25 A la suite d' une épidémie dans une région, on a constaté que le nombre de malades, n jours après l'apparition des premiers cas, est $75n^2-n3$, pour n entier tel que $0<n<60$.

g est la fonction définie sur [0 ; 60] par :
$g(x)=75x^2-x^3$.

1°) Dresser le tableau de variations de g.

2°) a. Déterminer le jour où le nombre de malades est maximal durant cette période de 60 jours

b. Préciser le nombre de malades ce jour là.
3°) a. Tracer la courbe représentant g dans un repère orthogonal (unités : 2 cm pour 10 jours en abscisse, 1 cm pour 5000 malades en ordonnée).

b. Déterminer graphiquement la période durant laquelle le nombre de malades est supérieur à 56 000.

26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4$.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

En déduire les asymptotes éventuelles.

Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

27

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{3}{2};+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x+1}{-2x-3}$ et soit (C) sa courbe.

1°) Calculer les limites de f en · et en $+\infty$.

En déduire les asymptotes éventuelles.

2°) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3°) Soit A le point d'abscisse 1 de la courbe de f.

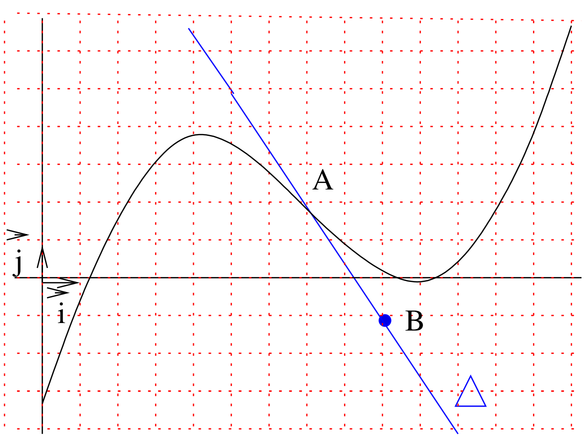
Déterminer une équation de la tangente (T) à cette courbe en A.

4°) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (unité : le cm).

Tracer la courbe (C) de f , la droite (T) et les asymptotes éventuelles.

28

On considère une fonction définie et dérivable sur I=[0 ;14]. Sa représentation graphique est la courbe C ci-dessous. Elle passe par le point A(7 ;2), et la tangente en A à C est la droite Δ qui passe par le point B(9 ;−1).



1°) Par lecture graphique :

a) Dresser le tableau de variation de f. Indiquer le signe de f'(x) sur I.

b) Donner le nombre de solution de l'équation f(x)=−2 sur I. Indiquer un encadrement de ces solutions à l'unité près. (Justifier).

c) Donner l'ensemble des réels tels que $0 \leq f(x) \leq 2$.

2°) Que valent f(7) et f'(7) ? En déduire l'équations de la tangente à la courbe au point d'abscisse 7.

3°) Dresser le tableau de variation de $\frac{1}{f}$ sur]1 ;10[.

29

Omar Khayyâm, savant et poète persan du XI^e siècle, a rédigé un traité d'algèbre où il propose une méthode géométrique de résolution d'une équation du 3^e degré utlisant les intersections de courbes qu'il savait construire.

Pour illustrer cette méthode, en la simplifiant, on considère l'équation :

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 15 = 0.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}/\{3\}$ par :

(1) g(x)=$\dfrac{3(3x-5)}{x-3}$.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

1°) Prouver que, pour x≠ 3, (1) équivaut à l'équation :

(2) f(x)=g(x).

2°) a) Quelle est la nature de la courbe représentative P de f ?

b) Tracer P (on se limitera à l'intervalle [−4 ;4]).

3°) a) Quelle est la nature de la courbe représentative H de g ?

b) Dresser le tableau de variation de g et tracer H (on se limitera à l'intervalle [−4 ;4]).

4°)Interpréter géométriquement l'équation (2). Par lecture graphique, en déduire le nombre de solutions de l'équation (1) et indiquer une valeur approchée à 0,1 près de la solution α de (1) appartenant à [0 ;3[.

5°) On se propose d'étudier la solution α de façon plus précise. A cet effet, on, considère la fonction h définie sur [0 ;2] par :

$$h(x) = (x-3)[f(x) - g(x)].$$

a) Calculer la dérivée h' de h.

b) Calculer h(1,33) et h(1,34).

c) Montrer que : $1,33 < \alpha < 1,34$.

30

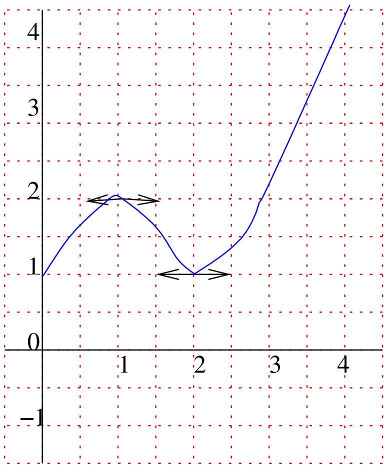


Figure 1

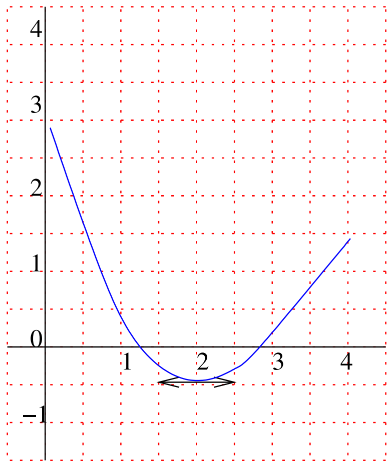


Figure 2

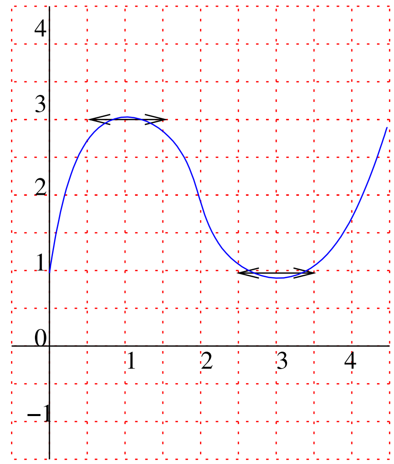


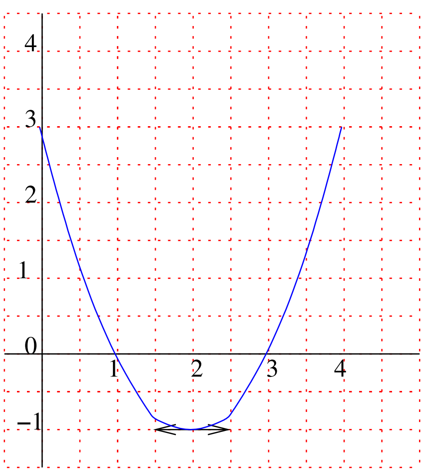
Figure 3

On connaît une partie des représentations graphiques de trois fonctions polynômes du troisième degré :

$$x \to ax^3 + bx^2 + cx + d$$

à coefficient réels, données par les figure 1, 2 et 3.

L'une des trois fonctions précédentes a pour fonction dérivée une fonction f du second degré dont la représentation graphique est donnée par la figure ci-dessous.



Fonction f

dérivée de F

1°) Quelle est celle des trois fonctions 1, 2 ou 3 qui a pour dérivée f ? (La réponse devra être soigneusement justifiée). On notera F cette fonction. Que représente F pour f ?

2°) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Donner le tableau de variation de F

31 Soient a et b deux nombres réels et f la fonction numérique de variable réelle :

$x \to ax + b + \frac{1}{3-x}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définitionde f.

2°) Sachant que $f(2) = 1$ et $f'(2) = 0$, montrer que a=−1 et b=2.

3°) Démontrer que la droite d'équation $y = -x + 2$ est asymptôte à (C), courbe représentative de f.

4°) Etudier les variations de f.

5°) Montrer que le point d'intersection des asymptôtes de (C) est centre de symétrie de (C).

6°) Construire (C) dans un repère orthonormé.

32 Soit la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $\frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Montrer que f n'est ni paire ni impaire.

c) Calculer f'(x) et étudier son signe.

d) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

e) Montrer que f(x) peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

f) En déduire les asymptôtes à la courbe de f.

g) Déterminer l'équation des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisse 0 et 4.

h) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I des deux asymptôtes et montrer que ce point est centre de symétrie de la courbe de f.

i) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f avec les axes de coordonnées.

j) Tracer la courbe de f.

33 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)=$3x^3 - 4x - 1$.

a) Etudier les variations de f.

b) Déterminer les limites de f et $-\infty$ et $+\infty$.

c) Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f au point I(0 ;−1).

d) Tracer (T) et (C).

e) Résoudre l'équation f(x)=−1. Vérifier graphiquement le résultat.

f) Résoudre l'équation f(x)=−2.

g) En utilisant la courbe, déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x)=m, suivant les valeurs du paramètre m.

h) La courbe (C) admet deux tangentes de coefficient directeur 5. Déterminer les points de contact de ces tangentes avec la courbe (C).

Tracer ces tangentes.

34 Soit la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par f(x)=$\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Montrer que f n'est ni paire ni impaire.

c) Calculer f'(x) et étudier son signe.

d) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

e) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f au point A(4 ;$-\frac{2}{3}$).

f) Dans un repère orthonormé, Tracer la tangente (T) et la courbe (C).

g) En utilisant le graphique, dire pour quelles valeurs de m, l'équation f(x)=m a trois solutions distinctes.

h) Montrer que l'équation f(x)=0 a trois solutions x_1, x_2 et x_3 . Donner un encadrement de ces solutions à 0,01 près.

35 Soit la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par f(x)=$\frac{x^2-2x+1}{x^2-4}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Calculer f'(x) et étudier son signe.

c) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

d) Tracer la courbe de f.

e) Montrer que l'équation (1) $3x^3-2x^2+22x+33=0$ a les mêmes solutions que l'équation f(x)=$-\frac{3}{5}$x+$\frac{7}{5}$.

f) Tracer la droite d'équation y=$-\frac{3}{5}$x+$\frac{7}{5}$ et déterminer graphiquement une solution entière x_0 de l'équation (1).

g) Déterminer a, b etc tels que

$$3x^3-2x^2-22x+33=(x-x_0)(ax^2+bx+c)$$

h) Déterminer par le calcul les autres solutions de l'équation (1).

36 Soit la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$$

On désigne par C sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité 2cm : ou 2 carreaux).

1°) a) Préciser l'ensemble de définition D de la fonction f.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x élément de D, on ait f(x)=$a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$.

2°) Etudier le sens de variation et les limites de f.

3°) Ecrire une équation de la tangente T à C au point I d'abscisse 0.
4°) Tracer T.

37 On donne la fonction f définie sur $D=\mathbb{R}\diagup\{2\}$ par

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-2}$$

1°) Montrer que pour tout x $\in D$, f(x)=$x+3+\frac{4}{x-2}$.

2°) Etudier les variations de f.

3°) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Tracer les droites Δ et Δ' d'équations $y=x+3$ et $x=2$.Tracer la représentation graphique C de f.

5°) Soit M le point de C d'abscisse x et P le point de Δ de même d'abcsisse.

a) Exprimer $\overline{PM}$ en fonction de x.

b) Calculer la limite de $\overline{PM}$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

c) Etudier le signe de $\overline{PM}$ sur chacun des intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$.

d) En déduire la position de C par rapport à Δ.

38 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$$

1°) Quel est l'ensemble de définition de f ? Etudier la parité de f.

2°) Etudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

3°) Etudier les variations de f et préciser les asymptôtes.

4°) Construire la courbe C_f dans un repère orthonormal.

5°) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe C_f au point A d'abscisse 2.

39 f est le polynôme défini par $f(x)=4x^3+x^2+1$.

a) Etudier les variations de f.

b) En déduire que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

c) Trouver une valeur approchée de α à 0,01 près.

d) Construire la courbe de f dans un repère.

e) Résoudre graphiquement l'inéquation f(x)=0.

Devoir n°1

I

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x + 5$

$g(x) = 1 + 3x + 6x^2$

$h(x) = \frac{1}{5x+2}$

$i(x) = \frac{2x-3}{4x-7}$

$j(x) = \frac{2x^2-3x+6}{4x^3-2}$

$k(x) = 3x - 2 + \frac{5x-2}{3x-1}$

II

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes puis les limites aux bornes de ces domaines de définition.

$f(x) = x^2 - 3x + 5$

$g(x) = (x+1)\sqrt{x}$

$h(x) = \frac{1}{x} - 2$

$k(x) = \frac{-3}{2x+1}$

III

Soit la fonction $f(x) = 5 + \frac{1}{x+1}$

1°) Déterminer le domaine de définition de f.

2°) Calculer la dérivée de f.

3°) En déduire les variations de f.

4°) Calculer les limites de f en -1, $+\infty$ et $-\infty$.

5°) Déterminer une équation de la tangente d_1 à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse x=0.

6°) La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, donnez leur équation.

7°) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe $\mathcal{C}$, la droite d_1 et les asympotes à la courbe.

8°) Quelle est la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote horizontale. Justifiez.

9°) Résoudre graphiquement l'équation f(x)=8.

10°) Pour quelle valeur de x, la distance de la courbe $\mathcal{C}$ à son asymptote horizontale est-elle inférieure à 0,1 ?

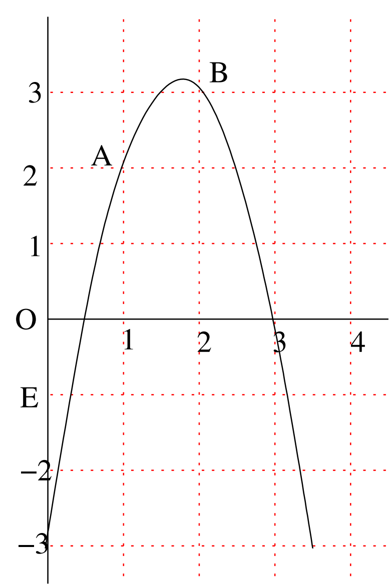
11°) Tracer la droite d_2 d'équation y=2x-1. Elle coupe la courbe $\mathcal{C}$ en un point A. Déterminer graphiquement puis par le calcul l'abscisse de A.

IV

Le plan est à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On désigne par a, b, c trois nombres réels et on considère la fonction f définie sur [0 ;4] par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sa représentation graphique Γ est donnée ci-contre.
Les points A et B sont deux points de Γ ; la tangente à la courbe Γ au point A passe par le point E(0 ;−1).

1°) A l'aide du graphique :
a) donner l'image par f de 1, puis l'image par f de 2 ;
b) donner la valeur de f'(1) ;
c) déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$.

2°) Déterminer les trois réels a, b, c à l'aide des résultats précédents.



Devoir n°2

I Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x^3 + 5x - 1$

$f(x) = 5 - 3x + 4x^2 + 6x^6$

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

$f(x) = (2x+1)(x-5)$

$f(x) = (4x^2 + x - 1)(5x - 2)$

$f(x) = (2x^2 + 5x - 1)^2$

$f(x) = (2x^2 - 5)^4$

$f(x) = \frac{1}{2x-3}$

$f(x) = \frac{3}{x^2-1}$

$f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$

$f(x) = \frac{x^2-3}{4x^2-5x+6}$

$f(x) = \left(\frac{2x-3}{x+7}\right)^2$

$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt{2x-3}$

$f(x) = x\sqrt{x}$

II Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 2 de la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$.

III Soit la fonction f(x)=$\frac{3x}{2x-1}$.

On désigne par C, la repreésentation graphique de f dans un repère.

1°) Démontrer qu'il existe deux points M_1 et M_2 de C tels que les tangentes en ces points aient pour coefficients directeurs m=-3.

Donner les coordonnées de ces points et une équation des tangentes.

2°) Existe-il un point de C pour lequel le coefficient directeur soit égal à 3 ?

IV Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $]-1\,;1[$.

Déterminer un encadrement à 10^{-2} près de cette solution.

V Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ admet 3 solutions dans $\mathbb{R}$.

Déterminer un encadrement à 10^{-2} près de ces solutions.

VI Existe-til a tel que la fonction polynôme définie par $f(x) = ax^3 + x^2 + x + 1$ soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}$?

VII Existe-t-il des nombres b, c et d tels que la courbe d'équation $y = x^3 + b^2x + cx + d$ soit tangente à l'axe des abscisses au point A(2 ;0) et coupe l'axe des ordonnées au point B(0 ;4) ?

VIII Déterminer une fonction polynôme de degré 2 telle que f"(1)=3 ; f'(0)=f(0) et f(2)=3.

IX Soit la fonction f(x)=$x^2 - 2$. A est un point de la représentation graphique de la courbe de f. m est le coefficient directeur de la tangent en A à la courbe. Compléter le tableau suivant puis construire les tangentes et la courbe.

Abscisse de A	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0		1	$\frac{3}{2}$
Ordonnée de A							
m							

Devoir n°3

I On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^2}$$

On sait que la courbe coupe l'axe des abscisses aux points A(1 ; 0) et B (3 ; 0) et que la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

1°) En utilisant l'énoncé ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

a) Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$. En déduire la valeur de a.

b) Déterminer les réels b et c.

c) Déterminer la limite de f(x) en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2°) On considère que f(x)=$\dfrac{-x^2+4x-3}{x^2}$

a) Calculer f'(x), puis étudier son signe et établir le tableau de variations de f.

b) Tracer la courbe dans un repère orthonomal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

II Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5+4x-x^2$.

1°) Etudier le signe de f .

2°) r est la fonction racine carrée définie pour x$\geq$, exprimer en fonction de x, la fonction $h = r \circ f$.

3°) Sur quel(s) intervalle(s) la fonction h est-elle définie ?

III On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{-2x^2-x+3}{x+1}$

C est la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$

1°) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus -1$.

2°) Déterminer par un calcul les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

3°) Résoudre l'inéquation $\dfrac{-2x^2-x+3}{x+1} \leq 0$et interpréter graphiquement le résultat.

4°) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x différent de 1, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$
En déduire le sens de variation de f.

IV Dans une usine on fabrique des appareils de projection.

Le coût total de fabrication de q appareils est donné par :

$C(q) = 0,02q^2+8q+500$ pour $q \in [0;600]$.

C(q) est exprimé en euros.

1°) Quels sont les coûts fixes, c'est à dire les coûts lorsque'aucun appareil n'est fabriqué

2°) Déterminer la quantité à partir de laquelle le coût total est supérieur ou égal à 4700 €.

3°) On suppose que chaque appareil est vendu au prix de 19 €.

Exprimer, en fonction de q, la fonction recette R et la fonction bénéfice B.

4°) Quelles sont les quantités à produire et à vendre pour que cette usine réalise un bénéfice.

5°) Y-a-t-il une quantité à produire pour que ce bénéfice soit maximum ? si oui laquelle et quel est alors le bénéfice.

Devoir n°4

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1200x - 100$.

1°) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2°) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle $[20\,;40]$. Donner en justifiant une valeur approchée de α à l'unité près.

3°) En déduire le signe de g(x) selon les valeurs de x.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x + 50 + \dfrac{1200x + 50}{x^2}$.

On appelle C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on prendra 1 cm pour 5 en abscisse et 1 cm pour 20 en ordonnée).

1°) Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.

2°) Montrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$, où g est la fonction définie dans la partie A.

3°) Etudier les variations de f.

4°) Montrer que la droite D d'équation $y = x + 50$ est asymptote à la courbe C.

5°) Construire C et D sur le même graphique.

6°) Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 130. On donnera les valeurs approchées des solutions à l'unité près.

Partie C :

Le coût total de fabrication d'une quantité x d'un produit, exprimée en centaines d'unités, est défini sur $]0\,;100[$ par : $C(x) = \dfrac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x}$.

C(x) étant exprimé en centaines d'euros. Le coût moyen de fabrication par centaine d'objets est donc défini par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1°) Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.

2°) On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 13 000 euros.

Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.

Révision sur les dérivées

Exercice n°1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 8x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

$f(x) = 5 + \frac{2}{x} - \sqrt{x}$

$f(x) = \frac{3}{2x^2 - 1}$

$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{4 - x}$

$f(x) = (3x - 2)^5$

$f(x) = \sqrt{2x^2 - 5}$

Exercice n°2

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 3$

1°) Calculer f'(x)

2°) Résoudre l'équation $f'(x) \geq 0$.

3°) Etablir le tableau de variation de f.

4°) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5°) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

Exercice n°3

Soit la fonction $g(x) = \frac{2x - 1}{x - 2}$.

1°) Quel est l'ensemble de définitionde g ?

2°) Calculer g'(x) et en déduire le sens de variation de la fonction g.

3°) Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.

4°) Donner les équations des asympôtes à la courbe.

5°) Déterminer les points de la courbe de g ayant une tangente de coefficient directeur égal à 2.

6°) Tracer la courbe de g.

Exercices de révision

1 Dans une classe de 28 élèves sportifs, 20 pratiquent le football et 13 le rugby. On choisit un élève au hasard.

Quelle est la probabilité que cet élève pratique les deux sport ?

2 Parmi les 80 filles qui étaient en terminale au lycée en 1995, 36 sont aujourd'hui salariées ; 39 sont mères de familles ; 15 sont salariées et mère de famille. On choisit au hasard l'une de ces femmes.

Considérons les événements A : « la femme choisie est salariée » et B : « la femme choisie est mère de famille ».

Quelle est la probabilité pour que la femme choisie ne soit ni salariée ni mère de famille ?

3 On lance un dé régulier à six faces.

Calculer la probabilité que le résultat soit :
a) pair et strictement supérieur à 4 ;
b) pair sachant qu'il est strictement supérieur à 4 ;
c) strictement supérieur à 4 sachant qu'il est pair.

4 Une urne contient cinq jetons blancs numérotés 1, 2, 3, 4, 5 et deux jetons noirs numérotés 1, 2.
On tire un jeton au hasard.

Calculer la probabilité :
a) qu'il soit noir et pair ;
b) qu'il soit noir sachant qu'il est pair ;
c) qu'il est pair sachant qu'il est noir.

5 Deux évènements A et B vérifient :
$P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$; $P(A \cup B) = 0{,}7$.

Sont-ils indépendants ? Sont-ils incompatibles ?

6 Deux évènements A et B indépendants vérifient :
$P(A) = 0{,}2$ et $P(B) = 0{,}4$.

Calculer : $P(A\cup B)$, $P(A\cup\overline{B})$, $P(\overline{A}\cup B)$ et $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

Exercices option maths

7 On tire une carte au hasard d'un jeu de 52 cartes bien battu.

1°) Les deux évènements « la carte tirée est un coeur » et « la carte tirée est un roi » sont-ils indépendants ?

2°) Même question pour « la carte tirée est un coeur » et la carte tirée n'est pas un roi ».

8 Un domino se compose de deux cases portant chacune un numéro de 0 à 6. Tout les dominos sont différents.

1°) Montrer qu'un jeu comporte 28 dominos.

2°) On tire un domino d'un jeu.
a) Quelle est la probabilité d'obtenir un double ?

b) Quelle est la probabilité que la somme des valeurs obtenues sur les deux faces soit égale à 8 ?

9 Dans une classe, il y a douze garçons dont quatre font de l'espagnol et dix-huit filles dont n font de l'espagnol.

On choisit un élève au hasard dans cette classe.

Les deux évènements « L'élève est un garçon », « L'élève fait de l'espagnol » sont-ils indépendants ?

10 Une urne U_1 contient trois boules vertes et une rouge, une urne U_2 deux boules vertes et deux rouges. On lance un dé régulier à six faces et si on obtient 6, on tire une boule dans U_1, sinon dans U_2.

Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

11 Marc a acheté 3 pantalons, 2 vestes, 5 chemises et 6 cravates.

Pendant combien de jours pourra-t-il porter une tenue différente par jour ?

12 Combien existe-t-il de manières de ranger 8 livres dans 5 tiroirs ?

13 Combien de numéros de téléphone à 6 chiffres peut-on constituer ?

Schéma de Bernouilli ou loi binômiale.

14 Dans une urne, il y a 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire une boule au hasard.

1°) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

2°) On réalise 5 fois ce tirage (la boule tirée est remise dans l'urne avant chaque nouveau tirage).

a)Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois une boule blanche ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule blanche ?

15 Un dé possède six faces numérotées 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. Un jeu consiste à lancer ce dé. Toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.
On jette le dé une fois.

1°) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

2°) On jette le dé quatre fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) exactement 3 fois un nombre pair ?
b) aucun nombre pair ?
c) 4 fois un nombre pair ?
d) au moins un nombre impair ?

Probabilités conditionnelles

16 Dans un lycée, sur 250 élèves, il y a 90 filles dont 30 pensionnaires. De plus, 90 garçons sont pensionnaires.

a) Compléter le tableau suivant :

	F (filles)	G (garçons)	Total
P (pensionnaires)			
$\overline{P}$ (non pensionnaires)			
Total			

b) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre.

c) Calculer $p(F \bigcap P)$; $p(F \cap \overline{P})$; p(F) ; $p(G \cap P)$; $p(G \cap \overline{P})$; p(G) ; p(P) ; p($\overline{P}$) ; p(F/P) ; p(F/$\overline{P}$) ; p(G/P) et p(G/$\overline{P}$).

d) Vérifier que :

$p(F \cap P) = p(F/P) \times p(P) = p(P/F) \times p(F)$

$p(F \cap P) + p(F \cap \overline{P}) = p(F)$

$p(F/P) \times p(P) + p(G/P) \times p(P) = 1$

17 Dans une classe, on a relevé les renseignements suivants :

	Porte des lunettes	ne porte pas de lunettes
Garçons	6	4
Filles	6	14

On choisit au hasard un élève dans la classe.
On note G l'événement « L'élève est un garçon » et L l'événement « L'élève porte des lunettes ».
1) Calculer P(G) et P(L).
2) Calculer P(G∩L), $P_L(G)$, $P_G(L)$. On énoncera chaque résultat par une phrase.
3) Les deux évènements G et L sont-ils indépendants ? Pourquoi ?
4) Donner deux représentations différentes de cette épreuve par un arbre pondéré.

18 Une urne U_1 contient trois boules vertes et une rouge, une urne U_2 deux boules vertes et deux rouges.

On lance un dé régulier à six faces et si on obtient 6, on tire une boule dans U_1, sinon dans U_2.
Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

19 Dans une urne U_1, il y a quatre boules noires et six boules blanches.

Dans une urne U_2, il y a trois boules noires et sept boules blanches.

On choisit une urne au hasard puis on tire au hasard une boule dans cette urne.

On note A l'événement « On choisit U_1 », N l'événement « La boule tirée est noire ».

1) Représenter l'épreuve par un arbre.

2) Calculer $P_A(N)$ et $P_{\overline{A}}(N)$.

3) Calculer : $P(N \cap A)$, $P(N \cap \overline{A})$ et $P(N)$.

4) Calculer $P_N(A)$.

Variables aléatoires

20 Un joueur lance simultanément trois pièces de monnaie parfaitement équilibrées.

Il gagne 60 euros s'il obtient 3 faces, gagne 30 euros s'il obtient deux faces exactement, gagne 10 euros s'il obtient exactement une face mais perd 100 euros s'il n'obtient que des piles.

On désigne par X la variable aléatoire représentant en euros la somme gagnée ($+60$; $+30$; $+10$) ou perdue (-100).

1°) Etablir la loi de probabilité de la variable X.

2°) a) Déterminer la probabilité de gagner strictement moins de 30 euros.

b) Déterminer la probabilité de gagner strictement plus de 10 euros.

3°) Calculer l'espérance mathématique de la variable X. Que représente ce résultat pour le joueur ?
4°) Un jeu est dit équitable si l'espérance est nulle.

a) Le jeu précédant est-il équitable ? favorable au joueur ou défavorable au joueur ?

b) Combien le joueur devrait-il perdre lorsqu'il n'obtient que des piles pour que le jeu soit équitable ?

21 Une urne de Bernoulli contient deux boules blanches et une boule noire.

1. On tire deux boules successivement avec remise et on appelle X le nombre de boules blanches.

Donner la loi de probabilité de X.

2. On tire deux boules successivement sans remise et on appelle X le nombre de boules blanches.

Donner la loi de probabilité de X.

3. On tire deux boules simultanément et on appelle X le nombre de boules blanches.

Donner la loi de probabilité de X.

22 Dans une foire, on propose le jeu suivant.

Le joueur mise 1 euros sur l'un des numéros 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Puis on lance deux dés réguliers à six faces :

- si le numéro sort deux fois, le joueur remporte deux fois sa mise ;

- s'il sort une fois, le joueur récupère sa mise ;

- s'il ne sort pas, le joueur perd sa mise.

Quelle est l'espérance de gain net ?

23 On lance deux dés réguliers et on relève la somme X des points marqués.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. On vous propose le jeu suivant. Vous misez 10 euros, puis vous lancez les dés. Si X¿9, vous gagnez 50 euros.

Le jeu est-il équitable ? Sinon, vous est-il favorable ou défavorable ?

24 Un questionnaire à choix multiples consiste à répondre successivement à quatre questions indépendantes.

Pour chaque question trois réponses sont proposées, dont une seule est correcte.

Un candidat répond au hasard à chaque question.

1. On appelle X le nombre de bonnes réponses.

Etudier X (loi de probabilité, espérance, écart-type).

2. On appelle Z le score du candidat, sachant que chaque bonne réponse rapporte deux points et chaque mauvaise réponse enlève un point. Etudier Z.

25 A la loterie, 10 000 billets ont été vendus. Le tirage au sort désignera un gagnant d'un gros lot de 5000 euros, dix gagnants d'une somme de 500 euros et vingt gagnants d'une somme de 100 euros.

1. Modéliser l'épreuve du tirage de la loterie à l'aide d'une urne de Bernoulli.

2. On appelle X le gain brut d'un joueur pour un billet choisi au hasard. Donner la loi de probabilité de X.

3. Quel est le gain brut moyen que peut espérer le joueur avec un billet ?

4. Quel est le prix minimal de chaque billet pour que la loterie soit rentable pour les organisateurs ?

5. Le prix d'un billet est 2 euros. Quel est le gain net moyen que peut espérer un joueur avec un billet ?

26 Dans un jeu, on pose à un candidat une question choisie au hasard entre deux catégories équiprobables : sport et musique.
Martin se présente à ce jeu. il sait qu'il a :

- trois chances sur quatre de donner la bonne réponse s'il est interrogé en sport ;

- une chance sur quatre de donner la bonne réponse s'il est interrogé en musique.

1. Démontrer que la probabilité qu'il donne la bonne réponse est $\frac{1}{2}$.

2. La mise pour participer au jeu est 10 euros. On gagne 20 euros si on donne la bonne réponse et qu'il s'agit de sport, 10 euros si on donne la bonne réponse et qu'il s'agit de musique ; on ne gagne rien si la réponse est fausse.

On note X le gain net de Martin.

a) Donner sa loi de probabilité.

b) Calculer son espérance μ et l'interpréter.

c) Calculer son écart-type σ.

d) Calculer la probabilité que X soit compris entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$.

Devoir Bac n°1

Au cours d'une quinzaine commerciale, un magasin offre un billet de loterie à tout acheteur d'un appareil électroménager.

Les 500 billets sont numérotés de 001 à 500 et ils sont tous distribués.
A la fin de la quinzaine, on effectue un tirage au sort, à l'issue duquel :

- le numéro 397 gagne 1000 euros.
- les 4 autres numéros se terminant par 97 gagnent chacun 100 euros.
- les 45 autres numéros se terminant par 7 gagnent chacun 10 euros.

Il y a ainsi en tout 50 numéros gagnant. Après l'achat d'un appareil, une personne reçoit un billet au hasard.

1°) On désigne par X la variable aléatoire qui, au numéro de ce billet, associe le gain correspondant.
a) Préciser les valeurs que peut prendre X.
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer son espérance mathé21matique.

2°) On considère les deux événements : A : «le numéro obtenue est gagnant » et B :«le deuxième chiffre du numéro est 9 ».
Calculer les probabilités p(A) et p(B).
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3°) Le magasin annonce dans sa publicité : " Pour doubler vos chance d'avoir au moins un numéro gagnant, achetez deux appareils ! ". Une personne achète deux appareils et reçoit deux billets au hasard.

a) On considère l'événement C : « aucun des deux billets n'est gagnant ».
Calculer p(C).
b) En déduire la probabilité pour qu'au moins un billet soit gagnant.
Cette annonce publicitaire est-elle correcte ? Justifier la réponse par le calcul.

Devoir Bac n°2

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} près.

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus 40 % des filles et 30 % des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'événement : «L'élève choisi fume», et P(A) la probabilité de cet événement. On note F l'événement : «L'élève choisi est une fille».

Quelle est la probabilité que :

a) Cet élève soit un garçon ?

b) Cet élève soit une fille qui fume ?

c) Cet élève soit un garçon qui fume ?

2. Déduire des questions précédentes, en le justifiant, que P(A) = 0,36.

3. L'enquête permet de savoir que :

• Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument.

• Parmi les élèves non 21fumeurs, 65 % ont des parents non fumeurs.

On note B l'événement : «L'élève choisi a des parents fumeurs».

On notera $P_D(C)$ la probabilité de l'événement C sachant l'événement D. Dans cette question, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a) Calculer les probabilités P(A∩ B) et P($\bar{A}$∩ B).

En déduire P(B).

b) Calculer $P_B(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

Calculer P (A), probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

Quelle remarque amène la comparaison de ces deux résultats ?

4. On rappelle que, pour chaque élève choisi, la probabilité qu'il soit fumeur est égale à 0,36.
On choisit quatre élèves de terminale au hasard.
On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.

A l'aide d'un arbre pondéré, calculer la probabilité qu'aucun de ces quatre élèves ne soit fumeur ?

Devoir Bac n°3

(Liban, juin 2002)
Dans une entreprise, les salariés sont classés en deux catégories : cadres et employés.

Une entreprise emploie 30 cadres et 240 employés.

Au cours de négociations sur la réduction du temps de travail, dite RTT, on propose aux salariés trois formules :

- Formule N°1 : une RTT de 30 minutes par jour de travail,

- Formule N°2 : une RTT d'un vendredi après-midi sur deux,

- Formule N°3 : une RTT de 12 jours de travail par an.

Une enquête a été réalisée auprès de tous les salariés de l'entreprise, chacun remplissant une fiche mentionnant son statut (cadre ou employé) et son choix de RTT. On a obtenu les résultats suivants :

- Aucun cadre n'a choisi la formule N°1,

- Parmi les employé :

36 ont choisi la formule N°1,

99 ont choisit la formule N°2,

40 % des salariés ont choisi la formule N°2.

R1 l'événement « le salarié a choisi la formule N°1 »,

R2 l'événement « le salarié a choisi la formule N°2 »,

R3 l'événement « le salarié a choisi la formule N°3 ».

% p(A) désigne la probabilité d'un événement A et p_B(A) celle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Déterminer les probabilités p(C) et p(E).

2. Parmi les probabilités p(R1∩C), p(R1∩E), p(R2∩E), p_E(R1), p_E(R2), p(R2) indiquer celles qui correspondent aux quatre résultats du sondage et donner leur valeur numérique.

3. a. Calculer la probabilité que le salarié soit un cadre ayant choisi la formule N°2.

b. Démontrer que la probabilité que le salarié ait choisi la formule N°2, sachant qu'il s'agit d'un cadre, est $\frac{3}{10}$.

4. Calculer la probabilité p(R1), puis la probabilité p(R3).

Devoir Bac n°4

(Amérique du sud, novembre 2001)

Des calculs statistiques effectués sur les élèves de terminale d'un lycée, concernant l'année scolaire 1999-2000, ont donné les renseignements suivants :

En juin 2000, les élèves de terminale se répartissaient ainsi :

45 % en S, 25 % en L et 30 % en ES.

Les taux, arrondis, de réussite au baccalauréat ont été les suivants :

S	L	ES
87 %	85 %	79 %

A la fin du mois de décembre 2000, sur l'ensemble des élèves qui étaient en terminale dans ce lycée en juin de la même année, on en choisit un au hasard.

Dans la suite de l'exercice, on appelle :

- S l'événement : « L'élève choisi était en S l'année scolaire précédente » ;

- L l'événement : « L'élève choisi était en L l'année scolaire précédente » ;

- E l'événement : « L'élève choisi était en ES l'année scolaire précédente » ;

- R l'événement : « L'élève choisi a été reçu au baccalauréat ».

1. a) Donner p(E), p_E(R) et montrer que p(R∩E) = 0,237.

b) Calculer p(R∩S) et p(R∩L).

c) En déduire que la probabilité que cet élève choisi au hasard ait été reçu au baccalauréat est 0,841.

2. Lorsque les élèves, reçus au baccalauréat, sont venus au lycée chercher leur diplôme, on s'est renseigné sur leur poursuite d'études, et on a obtenu les résultats suivants :

Elèves issus de	S	L	ES
Poursuite d'études en faculté	40 %	60 %	40 %

On appelle :
- F l'événement : « L'élève choisi est en faculté » ;

- E' l'événement R∩E ;

- L' l'événement R∩L ;

- S' l'événement R∩S ;

a) Donner p'_E(F).

b) Calculer p(F∩E').

c) Montrer que la probabilité que l'élève choisi soit en faculté est 0,3789.

3. A la même date, on choisit, toujours au hasard, un élève qui se trouvait en terminale de ce lycée l'année scolaire précédente et qui se trouve maintenant en faculté.

a) Pourquoi les événements F∩E' et F∩E sont-ils les mêmes ?

b) Calculer la probabilité que l'élève choisi soit issu de terminale ES. (En donner une valeur approchée par excès à 10^{-4} près.)

Devoir Bac n°5

(France métropolitaine, juin 2002)

Une école de commerce a effectué une enquête, en janvier 2000, auprès de ses jeunes diplômés des trois dernières promotions, afin de connaître leur insertion professionnelle.

A la première question, trois réponses et trois seulement sont proposées :

- A : « La personne a une activité professionnelle » ;

- B : « La personne poursuit ses études » ;

- C : « La personne recherche un emploi ou effectue son service national ».

On a constaté que 60 % des réponses ont été envoyées par des filles.

Dans l'ensemble des réponses reçues, on a relevé les résultats suivants :

- 65 % des filles et 55 % des garçons ont une activité professionnelle ;

- 20 % des filles et 15 % des garçons poursuivent leurs études.

1. On prend au hasard la réponse d'un jeune diplômé.

a) Montrer que la probabilité qu'il poursuive ses études est égale à 0,18.

b) Calculer la probabilité qu'il exerce une activité professionnelle.

2. On prend au hasard la réponse d'une personne qui poursuit ses études ; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'une fille (on donnera le résultat sous forme fractionnaire) ?

3. On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante trois réponses (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).
A l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que l'une au moins des réponses soit celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études.

4. Dans l'ensemble des réponses des jeunes diplômés exerçant une activité professionnelle, la répartition des salaires bruts annuels en milliers d' euros est la suivante :

Salaire brut annuel S	[20 ;22[	[22 ;26[	[26 ;30[	[30 ;34[	[34 ;38[	[38 ;40[
Pourcentage	5	15	28	22	20	10

Quel est le salaire brut annuel moyen ?

Devoir Bac n°6

(Asie, juin 2002)
Une entreprise vend des calculatrices d'une certaine marque.

Le service après-vente s'est aperçu qu'elles pouvaient présenter deux types de défauts, l'un lié au clavier et l'autre lié à l'affichage.

Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante : la probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04.

En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03.

Alors qu'en l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est 0,94.

On note :

- C l'événement : « La calculatrice présente un défaut de clavier » ;

- A l'événement : « La calculatrice présente un défaut d'affichage ».

On notera p(E) la probabilité de l'événement E. L'événement contraire de E sera noté $\overline{E}$.

p_F(E) désignera la probabilité conditionnelle de l'événement E par rapport à l'événement F.

Dans cet exercice, les probabilités seront écrites sous forme de nombres décimaux arrondis au millième.

1. a) Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes :

$p_{\overline{C}}(\overline{A})$, p_C(A) et p(C).

b) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2. On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.

a) Calculer la probabilité que la calculatrice présente les deux défauts.

b) Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.

c) En déduire p(A).

d) Montrer que la probabilité de l'événement « la calculatrice ne présente aucun défaut » arrondie au millième est égale à 0,902.

3. Un client choisit au hasard trois calculatrices de cette marque.

a) Calculer la probabilité pour que les trois calculatrices ne présente aucun défaut.

b) Calculer la probabilité pour qu'au moins une calculatrice ait un défaut.

Devoir Bac n°7

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat.

Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente.

Parmi les tablettes gagnantes, 60 % permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40 % exactement deux places de cinéma.

La notation p(A/B) désigne la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

1°) Un client achète une tablette de chocolat.

On considère les événements suivants :

G : «Le client achète une tablette gagnante » ;
U : «Le client gagne exactement une place de cinéma » ;
D : «Le client gagne exactement deux places de cinéma ».

a) Donner p(G), p(U/G) et p(D/G).

b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est 0,3.

c) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnés par le client.

Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique de X.

2°) Un client achète deux jours de suite une tablette de chocolat. Les deux achats sont indépendants.

a) Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.
b) Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.
c) Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29 (on pourra s'aider d'un arbre).

Devoir Bac n°8

Un jeu forain utilise une roue divisée en dix secteurs : sept sont verts, trois sont rouges.

On fait tourner la roue, et lorsqu'elle s'arrête, un repère désigne un secteur, chaque secteur ayant la même probabilité d'être obtenu.

Jouer une partie est l'expérience aléatoire consistant à faire tourner la roue trois fois de suite, de façon indépendante, en notant à chaque arrêt la couleur obtenue.

1°) a) Représenter à l'aide d'un arbre cette expérience et indiquer sur chaque branche les probabilités correspondantes.
b) Montrer que la probabilité d'obtenir trois fois le vert est égale à 0,343.
c) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le rouge.
d) Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois le rouge.

2°) Pour jouer une partie, un joueur doit miser une somme d'argent : soit m le montant de sa mise.

S'il obtient trois fois le vert, il pert sa mise.

S'il obtient une ou deux fois le rouge, il récupère sa mise.

S'il obtient trois fois le rouge, il récupère sa mise et gagne une somme d'argent égale à dix fois sa mise.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur : les valeurs que peuvent prendre X sont $-$m, 0 et 10m.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.
Expliquer pourquoi, quelle que soit la mise du joueur, la règle du jeu avantage le forrain.

Devoir Bac n°9

La documentation d'un lycée effectue une enquête auprès de 500 élèves entrant au CDI afin de connaître le nombre d'ouvrages consultés selon la fréquentation du CDI.

On obtient les résultats suivants :

• 18 % des élèves consultent un seul ouvrage par visite et parmi ceux-ci 90 % viennent au moins une fois par semaine.

• 125 élèves viennent moins d'une fois par semaine et 16 % d'entre eux consultent 2 à 5 ouvrages par visite.

• 45% des élèves viennent au moins une fois par semaine et consultent chaque fois plus de 5 ouvrages.

1°) Compléter le tableau des effectifs ci-dessous :

Fréquentation / Nombre d'ouvrages consultés	Au moins une fois par semaine	moins d'une fois par semaine	Totaux
Un ouvrage			
de deux à cinq ouvrages			
Plus de cinq ouvrages			
Totaux			

2°) On prend au hasard un élève fréquentant le CDI et on considère les événements :

A : «l'élève vient au moins une fois par semaine au CDI »,

B : «l'élève consulte 2 à 5 ouvrages »,

C : «l'élève consulte plus de 5 ouvrages »,

D : «l'élève vient au moins une fois par semaine et consulte entre 2 et 5 ouvrages ».

Calculer la probabilité des événements A, B, C, D et A∪B ;

3°) a) On considère un élève qui vient au moins une fois par semaine au CDI.

Quelle est la probabilité pour qu'il consulte de 2 à 5 ouvrages ?

b) On considère un élève qui consulte de 2 à 5 ouvrages.

Quelle est la probabilité qu'il viennent au moins une fois par semaine au CDI ?

N.B. : Les résultats seront donnés à 10^{-3} *près.*

Devoir Bac n°10

Dans une académie, les élèves candidats au baccalauréat série ES se répartissent en 2003 selon les trois enseignements de spécialité : mathématiques, sciences économiques et sociales et langue vivante.

Nous savons de plus que :

• 37% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.

• 25% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité langue vivante.

• 21% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques et ont obtenu le baccalauréat.

• 32,5% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales et ont obtenu le baccalauréat.

• De plus, parmi les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité langue vivante, 72,5% ont obtenu le baccalauréat.

On interroge un candidat pris au hasard.
On note :

• M l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques » ;

• S l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales » ;

• L l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité langue vivante » ;

• R l'événement « le candidat a obtenu le baccalauréat ».

On pourra faire un arbre pour faciliter la réponse aux questions. Les résultats demandés seront arrondis au millième près.

1°) Traduire en termes de probabilités et en utilisant les notations indiquées les informations numériques données ci-dessus.

2°) a) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseigne- ment de spécialité sciences économiques et sociales.

b) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseigne-ment de spécialité langue vivante et ait réussi aux épreuves du baccalauréat.

3°) Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait échoué au baccalauréat ?

4°) Ce candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.

Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat ?

5°) Montrer que le pourcentage de réussite au baccalauréat pour les candidats de ES dans cette académie est 71,6%.

6°) On interroge successivement au hasard et de façon indépendante trois candidats.

Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit reçu ?

Devoir Bac n°11

Les parties A et B sont indépendantes.
A la rentrée scolaire, on fait une enquête dans une classe de sixième comprenant 25 élèves.

PARTIE A :

On sait que, dans cette classe :
48% des élèves ont 11 ans, $\frac{1}{5}$ ont 13 ans et les autres ont 12 ans.

Ces élèves utilisent deux types de sacs de cours : le sac à dos ou le cartable classique.
15 élèves, dont les $\frac{2}{3}$ ont 11 ans, ont acheté un cartable classique ; les autres, dont la moitié ont 12 ans, ont acheté un sac à dos.

1°) . Recopier le tableau suivant sur votre copie et le compléter à l'aide des données de l'énoncé :

	Sac à dos	Cartable	Total
11 ans			
12 ans			
13 ans			
Total			

2°) On interroge au hasard un élève de cette classe. On note :
• S l'événement : « l'élève a un sac à dos » ;
• C l'événement : « l'élève a un cartable » ;
• T l'événement : « l'élève a treize ans ».

a) Montrer que P(S) = 0,4.

b) Calculer P(C (T).

3°) On interroge successivement et de manière indépendante trois élèves de cette classe .
Quelle est la probabilité qu'exactement deux d'entre eux aient un sac à dos ?

PARTIE B :

A leur inscription, ces élèves doivent souscrire une assurance scolaire ; deux types de contrats annuels sont proposés.

D'après des études statistiques, le contrat A dont le coût est de 20 €est choisi avec une probabilité de 0,7 et le contrat B dont le coût est de 30 €est choisi avec une probabilité de 0,3.

De plus, le collège propose une adhésion facultative au foyer coopératif, d' un montant de 15 €.
Indépendamment du contrat d' assurance choisi, 40% des élèves prennent une carte d'adhérent du foyer.

On note :
• A l'événement : « l'élève a choisi le contrat A » ;
• B l'événement : « l'élève a choisi le contrat B » ;
• F l'événement : « l'élève est adhérent au foyer ».

1°)Construire l'arbre des probabilités associé à la situation décrite ci-dessus.

2°) Quelle est la probabilité qu'un élève ait pris le contrat B et soit adhérent du foyer ?

3°) A chaque élève pris au hasard, on associe le coût X de son inscription (assurance scolaire plus adhésion éventuelle du foyer) ;

a) Quelles sont les valeurs possibles de ce coût ?

b) Etablir la loi de probabilité de ce coût et présenter le résultat dans un tableau.

c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

Devoir Bac n°12

Une salle de spectacle propose pour la saison des abonnements pour 4 , 5 ou spectacles.
Dans la population des abonnés la répartition est la suivante :
• 43,5% ont choisi l'abonnement 4 spectacles ;
• 33% ont choisi l'abonnement 5 spectacles ;
• le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

D'autre part, 65% des abonnés sont des jeunes de moins de 25 ans, et dans cette population, la répartition est différente :
40% ont choisi l'abonnement 4 spectacles ;
40% ont choisi l'abonnement 5 spectacles ;
le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

On interroge un abonné au hasard.
On note A l'événement : " l'abonné interrogé a moins de 25 ans ".
Ainsi, la probabilité p(A) de cet événement est 0,65.
On note B l'événement : " l'abonné interrogé a choisi 5 spectacles ".
Pour tout évènement V , on note $\bar{V}$ l'événement contraire de V.

1°) a. Quelle est la probabilité que l'abonné interrogé ait 25 ans ou plus ?

b. Sachant que l'abonné interrogé a moins de 25 ans, quelle la probabilité qu'il ait choisi 5 spectacles ?

c. Décrire l'événement $A \cap B$ et démontrer que la probabilité de cet événement est égale à 0,26.

2°) a. Démontrer que la probabilité $p(\bar{A} \cap B$ est égale à 0,07.

b. En déduire la probabilité conditionnelle de B sachant que $\bar{A}$ est réalisé.

3°) L'abonnement pour 4 spectacles coûte 50 euros, celui pour 5 spectacles coûte 60 euros, et celui pour 6 spectacles coûte 70 euros.

On appelle X la variable aléatoire égale à la somme dépensée par l'abonné interrogé.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X.

Devoir Bac n°13

Au cours d'une kermesse, l'animateur d'un stand dispose, dans un enclos, de douze cages peintes : sept sont blanches, deux noires et les trois autres vertes.
L'animateur place alors une souris dans l'enclos.
On suppose qu'à chaque jeu, la souris choisit d'entrer au hasard dans une cage et que tous les choix sont équiprobables.
Un joueur participe au jeu.

Le règlement du jeu est le suivant :
• Si la souris entre dans une cage blanche, le joueur perd ;
• Si la souris entre dans une cage noire, le joueur gagne,
• Si la souris entre dans une cage verte, l'animateur remet la souris dans l'enclos ; si la souris entre alors dans une cage noire, le joueur gagne sinon il perd.

On suppose que le choix de la deuxième cage est indépendant du choix de la première.

1°) Montrez que la probabilité de l'événement " le joueur gagne " est $\frac{5}{24}$.

2°) Un joueur ne possède que 5 euros qu'il verse pour participer à une partie.
S'il gagne, il reçoit k euros ; sinon, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme que possède le joueur après la partie.

a. Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b. Calculez, en fonction de k, l'espérance mathématique E[X] de la variable aléatoire X.
c. Quelle valeur faut-il donner à k pour que le jeu soit équitable ? (c'est à dire pour que ce joueur puisse espérer posséder 5 euros à la fin de la partie)

Primitives

1 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^1 - 4x + 2$ $\quad f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x - 1$ $\quad f(x) = 1 - x^2 + 3x^4$

$f(x) = \frac{3}{x^2}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ $\quad f(x) = (x+1)^3$

$f(x) = (2x+3)^3$ $\quad f(x) = x(x^2+1)^2$ $\quad f(x) = (x^2+3)^2$

$f(x) = (x^2 + \frac{1}{3})(x^3+x)^4$ $\quad f(x) = (2x^3 + x - \frac{1}{2})(x^4+x^2-x)^5$ $\quad f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x-2)^3}$

$f(x) = \frac{4x^2}{(x^3+8)^3}$ $\quad f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ $\quad f(x) = \frac{1}{3x-1}$

2 Trouver la primitive F de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 7$ et telle que F(1)=−7.

3 Montrer que F et G sont deux primitives d'une même fonction :

F(x)=$\frac{5x^2 - 7x + 9}{3x - 1}$ et $G(x) = \frac{5x^2 - 16x + 12}{3x - 1}$

4 Montrer que la fonction F est une primitive de f :

$F(x) = \left(\frac{(3x-1)^8}{(4-5x)^{10}}\right)$ et $f(x) = 63 \times \left(\frac{3x-1}{4-5x}\right)^9$

5 Vérifier que la fonction $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ de la forme $F(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$.

En déduire toutes les primitives de f.

6 1°) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = 0,05x^2 + 2x + 45$.

2°) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On prendra pour unité graphique 0,1 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Assembler q ordinateurs coûte, en milliers de francs, à une entreprise :

$$C(q) = 0,05q^2 + 2q + 45$$

3°) La concurrence est telle que l'entreprise vend ces ordinateurs à prix coûtant.

Toutes les entreprises de ce secteurs fonctionnent dans les mêmes conditions.

a) Quel est le prix unitaire d'un ordinateur lorsqu'on en fabrique q ?
b) Pour quelle valeur de q ce prix est-il le moins élevé ?

c) Une administration décide d'acheter 600 ordinateurs.

A combien d'entreprises doit-elle s'adresser pour minimiser le coût de cette opération ?

7 Déterminer des primitives de chacune des fonctions suivantes :

1°) Pour x $\in \mathbb{R}$, f : x $\mapsto x^3 - 2x^2 - 5$.

2°) Pour x $\in [1\ ;+\infty[$, g : x $\mapsto \dfrac{2}{x^2}$.

3°) Pour x $\in [1\ ;+\infty[$, h : x $\mapsto \dfrac{2}{sqrtx}$.

8 Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1°) f : x $\mapsto \dfrac{1}{x^4}$ sur $]0\ ;+\infty[$.

2°) g : x $\mapsto 3x^2 \times (x^3-1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

3°) h : x $\mapsto \dfrac{2x}{(x^2-3)^3}$ sur $[4\ ;+\infty[$.

4°) k : x $\mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$.

9 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-$ \{2} par : $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x-2}$

1°) Calculer la dérivée de f.

2°) En déduire la primitive de la fonction g : x $\mapsto \dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ qui prend la valeur -2 en 1.

10 Trouver la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f :

x $\mapsto x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + 5x - 1$ qui s'annule pour x = 2.

11 Déterminer la primitive de la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par

: $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}$qui s'annule pour x = 1.

12 Déterminer une primitive de f sur I :

1°) I =$\mathbb{R}$ et f : x $\mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$.

2°) I = $]-\infty; -3]$ et f : x $\mapsto \dfrac{-5x}{\sqrt{x^2-4}}$

13 Une entreprise fabrique un certain produit en quantité x ($x \in]0\ ;500]$).

Les coûts fixes s'élèvent à 6000€. On suppose que le coût marginal (en €) est donnée par g(x) = 2x + 45.

On rappelle que le coût total est une primitive du coût marginal.

1°) Quelle est l'expression du coût total en fonction de x ?

2°) Comparer pour 200 unités produites, le coût marginal, le coût de la dernière unité produite et le coût d'une unité supplémentaire.

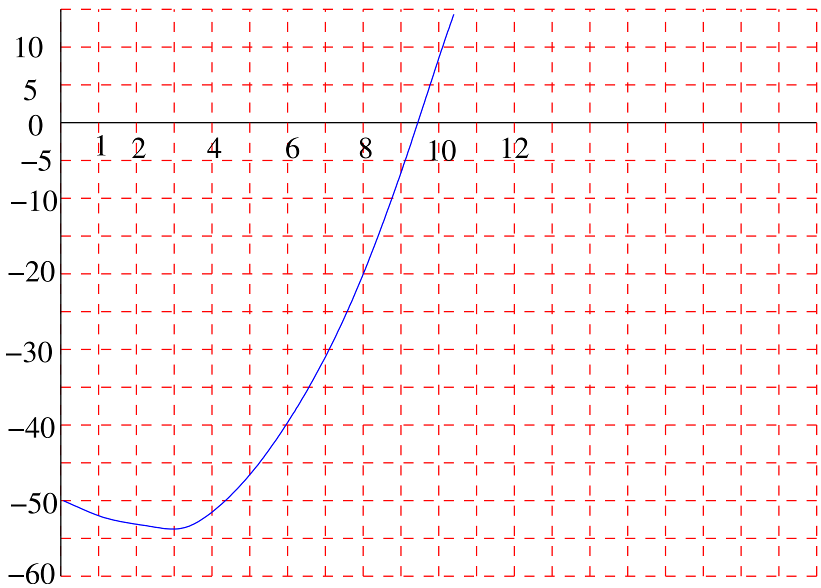
Devoir n°1

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur [0 ; 50] par :

$$f(x) = x^2 + \frac{25x}{\sqrt{x+1}} - 50\sqrt{x+1}$$

La courbe C de f est donnée ci-dessous :



1°) On admet que f(x) s'annule pour une seule valeur α de l'intervalle]0 ; 50[; en déduire de la représentation graphique le signe de f(x) sur l'intervalle [0 ; 50].

2°) Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

Pour la suite du problème, on prendra pour α la plus petite de ces deux valeurs.

PARTIE B

Une entreprise fabrique une quantité x exprimée en kilogrammes, d'un certain produit.
Le coût marginal C, exprimé en euros est défini sur [0 ; 50] par

$$C(x) = 2x + \frac{25}{\sqrt{x+1}}.$$

1°) La fonction coût total, notée C_T est la primitive de la fonction C sur [0 ; 50] qui prend la valeur 50 pour x = 0.

Vérifier que $C_T(x) = x^2 + 50\sqrt{x+1}$

2°) Le coût moyen est la fonction est la fonction C_m définie par :

$Cm(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$ sur]0 ; 50]. a) Donner une expression de $C_m(x)$ en fonction de x.

b) Vérifier que la dérivée de C_m peut se mettre sous la forme $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.

PARTIE C

1°) Déduire des résultats précédents le tableau de variation de la fonction C_m sur]0 ; 50].

2°) Tracer dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe représentative de C_m sur [1 ; 50].

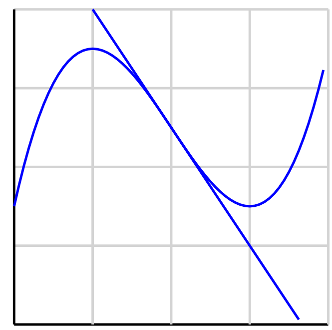
3°) Quelle est la production donnant le coût moyen minimal ?

Calculer alors le coût total et le coût marginal correspondant au coût moyen minimal.

Devoir n°2

I Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 4] dont la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est la courbe C ci-dessous.

Placer les points M, N, P, Q et R appartenant à C tels que les coordonnées de M sont $(0;\frac{3}{2})$, celles de N sont $(1;\frac{7}{2})$, celles de P sont $(2;\frac{5}{2})$, celles de Q sont $(3;\frac{3}{2})$ et celles de R sont $(4;\frac{7}{2})$.



La courbe C admet en chacun des points N et Q une tangente parallèle à l'axe des abscisses

La droite Δ est tangente à la courbe C au point P ; elle passe par le point S de coordonnées (3 ; 1). Placer S.

1°) a) Donner f '(1), f '(2) et f '(3).

b) Déterminer une équation de la droite Δ. 2°) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation f(x) = 3 sur l'intervalle [0 ; 4].

3°) f est la dérivée d'une fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 4]. En justifiant la réponse, donner le sens de variation de F.

4°) a) Pour tout x∈[0 ; 4], f '(x) = a(x-1)(x-3), a étant une constante réelle.

Déterminer a à l'aide des résultats de la question 1°) a).

b) Vérifier que pour tout x∈[0 ; 4], f '(x) $=\frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$.

Déterminer l'expression de f(x) pour x∈[0 ; 4].

II 1°) Soit f la fonction définie sur [−1 ; 1] par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5-2x^2}}$.
Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule pour x = 0.

2. a) Donner une primitive de chacune des fonctions g(x)$=\frac{1}{(x-1)^3}$ et $h(x) = \frac{1}{(x-1)^4}$ définies sur $I =]1\ ;+\infty[$.
b) f est la fonction définie sur I par : $f(x) = \frac{x}{(x-1)^4}$

Trouver des réels a et b tels que pour tout x de I : f(x) $=\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^4}$.

En déduire une primitive de f sur I.

III On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{27x}{x^4+3}$.

1°) Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f.

2°) Calculer f '(x), et montrer que $f'(x) = \dfrac{-81(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x^4+3)^2}$.

Etudier son signe.

3°) Construire le tableau de variation de f.

4°) Déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x) = 1.

Formulaire

$\ln 1 = 0$
$\ln 0$ n'existe pas
$\ln e = 1$ où e$\simeq$ 2,71
$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
ln (a^n)=n ln a

L'ensemble de définition de f(x)=$\ln x$ est $]0;+\infty[$
Les valeurs de $\ln x$ appartiennent à l'intervalle
$]-\infty;+\infty[$

$\ln a = \ln b \Rightarrow$ a=b
$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$
$\ln a \leq \ln b \Rightarrow$ a$\leq$ b

La dérivée de ln x est $\frac{1}{x}$
La dérivée de ln u est $\frac{u'}{u}$
Une primitive de $\frac{1}{x}$ est ln x
Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est ln u

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\ x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \ln\ x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x\ \ln\ x = 0$$

Exercices d'application

1 1°) Calculer :

A=$\ln(8\times 3) - 3\ \ln\ 2 + \ln\frac{1}{3}$

2°) Calculer en fonction de ln 2 :

B=$\ln(16)^3$
C=$\ln\left(\frac{\sqrt{2}e}{8}\right)$

3°) Calculer en fonction de ln 2 et de ln 5 :

D=$\ln\left(\frac{5}{e}\right)^4 + 1 - \ln(10\sqrt{e})$

2 Déterminer l'ensemble de définition puis résoudre les équations :

$\ln x = -2$

$\ln(2x-4) = \ln 4$

$\ln(3x-2) = \ln(x+4)$

$2\ \ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x+3)$

$\ln(x+1) + \ln(x-2) = 0$

$(\ln x)^2 - 5\ \ln x + 6 = 0$

$\ln^2 x - 3\ \ln x - 18 = 0$

3 Résoudre les inéquations suivantes :

$2\ \ln(x+4) \geq \ln(2-x)$
$\ln^2 x - 3\ \ln x - 18 \geq 0$

4 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

f(x)=$\ln(1-2x)$
f(x)=$\ln(x^2-4)$
f(x)=$\ln(x^2)$

f(x)=$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

f(x)=$x\ \ln x - 2x$

5 Calculer les primitives des fonctions suivantes :

f(x)=$\frac{1}{x}$
f(x)=$\frac{1}{x-5}$

f(x)=$\frac{2x-2}{x^2-2x+3}$

f(x)=$\frac{5x}{5x^2-1}$

f(x)=$\frac{2x^2-2x+2}{2x^3-3x^2+6x-3}$

6 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2-3x+2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-3}{x^2+7}\right)$$

$$\lim_{x\to\ 5} \ln(x-5)$$

$$\lim_{x\to\ 2} \ln\left(\frac{x^2-4}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to\ 2} \ln\left(\frac{x}{x^2-4}\right)$$

Annales du bac

7 1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $x^2-3x-18=0$

b) $\ln(x+2)+\ln(x-5)=3\ \ln 2$

c) $(\ln x)^2-3\ \ln x-18=0$

2°) Calculer

$$I=\int_1^2 \frac{x^2-3x-18}{x}\,dx$$

8 Soit $P(x)=2x^3-x^2-13x-6$

1°) a) Montrer que $P(x)=(x+2)(2x^2-5x-3)$

b) Résoudre l'équation $P(x)=0$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$2(\ln x)^3-(\ln x)^2-13\ln x-6=0$

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$2\ \ln(1-x)+\ln(2x+3)-ln(x+1)=2\ \ln 3$

9 Résoudre le système :

$$\begin{cases} X+2Y=1 \\ X-Y=4 \end{cases}$$

En déduire la solution du système :

$$\begin{cases} \ln(xy^2)=1 \\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=4 \end{cases}$$

10 Résoudre les inéquations suivantes :

$x^2-3x-4\leq 0$

$(\ln x)^2-3\ \ln x-4\leq 0$

$2\ \ln(1-x)-ln(x+5)\leq 0$

11 Soit la fonction G définie par

$G(x)=x\ lnx-x$

a) Calculer G'(x).

Soit f la fonction définie par

$f(x)=x^2+x+1+\ln x$

Calculer la primitive F de f qui s'annule pour x=1.

Problème n°1

A Soit la fonction numérique g définie pour tout réel strictement positif x par :

$g(x) = x + 1 + \ln x$

1°) Déterminer les limites de la fonction g en zéro et en $+\infty$.

Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

2°) a) Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle]0,27 ;0,28[tel que g(α)=0.

b) En déduire le signe de g(x) selon les valeurs de x.

B

On considère la fonction numérique f définie pour tout réel srictement positif par :

$f(x) = \dfrac{4x \ln x}{x+1}$

1°) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2°) a) Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a :

$f'(x) = \dfrac{4\ g(x)}{(x+1)^2}$

b) En déduire le signe de f'(x) et le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3°) Calculer les images par f des réels : 0,1 ; 0,25 ; 0.5 ; 1 ; 1,5 ; et 2.

4°) Tracer la portion de de la courbe représentative de f sur l'intervalle]0 ;2[. (On prendra un repère orthogonal ayant pour unité graphique 4cm.)

Problème n°2

A On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$g(x) = x^2 - 2\ \ln x + 2.$

1°) Calculer g'(x) et dresser le tableau de variation de g. (L'étude des limites n'est pas demandée.)

2°) Préciser le signe de G.

B On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x) = \dfrac{2\ \ln x}{x} + x - 1$

1°) a) Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}.$

En déduire le signe de f'(x).

b) Calculer :

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Calculer :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

e) Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de $f(\dfrac{1}{e})$; $f(\dfrac{1}{2})$; $f(2)$; $f(e)$ et $f(4)$.

2°) Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (Unité graphique : 2 cm).

On note C la courbe représentative de f.

a) Montrer que la droite D, d'équation $y = x - 1$ est asymptôte à la courbe C et étudier la position de C par rapport à D.

b) Construire D et C.

c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par :

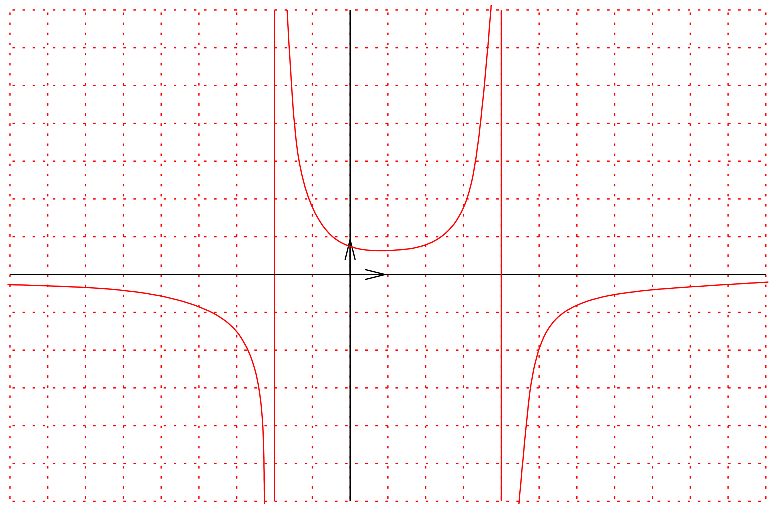
$h(x) = (\ln x)^2$

d) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C, D et les droites d'équation x=1 et x=2.(On exprimera la réponse au mm^2 près.)

Problème n°3

Partie A

On utilisera pour cette question, la courbe ci-contre qui représente une fonction numérique f.



1°) Etudier graphiquement le signe de f(x) lorsque x est un réel distinct de -2 et de 4.

2°) On considère les fonctions numériques f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1(x) = \frac{-12}{-x^2+2x+8}$$

$$f_2(x) = \frac{6}{-x^2+2x+8}$$

$$f_3(x) = \frac{6}{x^2-6x+8}$$

Sachant que la fonction f est l'une d'entres-elles, déterminer laquelle. (On pourra s'intéresser aux valeurs qui annulent le dénominateur ainsi qu'à la valeur de f(0).)

Partie B

Soit la fonction numérique g définie pour $-2 < x < 4$ par :

$$g(x) = \ln \frac{x+2}{4-x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 3 cm.

1°) **Etude de g.**
a) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
En déduire l'existance d'asymptôtes pour la courbe (C).

b) Calculer la dérivée de g .
Après avoir reconnu dans la fonction g', l'une des fonctions f_1, f_2 ou f_3 sur l'intervallle $]-2;4[$, étudier les variations de g.

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

d) Tracer (T) et (C).

2°) La droite parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation x=3 coupe (T) en A, (C) en B et l'axe des abscisses en D.

a) Calculer l'aire en cm^2 des triangles IAD et IAB.

b) On note Δ l'aire en cm^2 de la région du plan limitée par la courbe (C), la droite (T) et les droites d'équation x=1 et x=3.
On admet que l'arc de courbe (C) pour les valeurs de x de l'intervalle [1 ;3] est à l'intérieur du triangle IAB.
Donner un encadrement de Δ.

c) On considère la fonction G définie sur l'intervalle [1 ;3] par :

$G(x) = (x+2)\ln(x+2) - (x-4)\ln(4-x)$.

- Calculer G'(x).
- Calculer $\int_1^3 \ln\left(\frac{x+2}{4-x}\right)\, dx$.
- En déduire la valeur de Δ.

Problème n°4

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle x, définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = (1 + \ln x)^2 - 2x$ et $g(x) = \ln x - x + 1$

1°) a) Calculer la fonction dérivée g' de g puis dresser le tableau de variation de g. (Les limites et la courbe représentative ne sont pas demandées pour cette fonction).

b) En déduire le signe de g(x) pour tout x strictement positif.

2°) Calculer la fonction dérivée f' de f et montrer que f'(x) a le même signe que g(x) pour tout x strictement positif.

3°) a)Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b) Montrer que pour tout x strictement positif, on peut écrire :

$$f(x) = x\left[\frac{1}{x} + 2\,\frac{\ln x}{x} + \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^2 - 2\right]$$

c) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4°) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. (Unité : 5 cm.)

a)Déterminer et tracer la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

b) Construire (C). On placera les points d'abscisses 0,1 ; 0,3 ; 0,5 ; 1 ; 2 et 3.

5°) Déduire de ce qui précède que l'équation :

$(1 + \ln x)^2 - 2x = 0.$

admet une solution unique α telle que $0,1 < \alpha < 0,3$.

Donner un encadrement de α à 0,01 près.

Problème n°5

A On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{x^3}{3} - 2\ \ln x$$

1°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3°) Montrer qu'il existe un réel unique x_0 compris entre 1 et e tel que $f(x_0) = 0$.

4°) Utiliser le sens de variationde f pour démontrer que :

- si $x < x_0$, f(x) est négatif.
- si $x < x_0$, f(x) est positif.

Pour la suite, on admettra que $x_0 \simeq 1,22$.

B On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{x}{3}.$$

1°) a)Etudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = -\dfrac{x}{3}$ est asymptôte a la courbe (C) représentant la fonction g dans un repère orthonormal d'unité 5cm.

c) Indiquer la position de (C) par rapport à cette asymptôte.

2°) a) Montrer que : $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$

b) En déduire le sens de variation de g.

3°) a) Construire la courbe (C).

b) Déterminer le point A de la courbe (C) où la tangente a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{3}$

c) Tracer cette tangente.

C 1°) Soit n un entier naturel non nul. Soit I_n, l'aire en cm^2 de la partie comprise entre la courbe (C), l'asymptôte d'équation $y = -\dfrac{x}{3}$ et les droites d'équations x=1 et x=n.

Calculer I_n en fonction de n

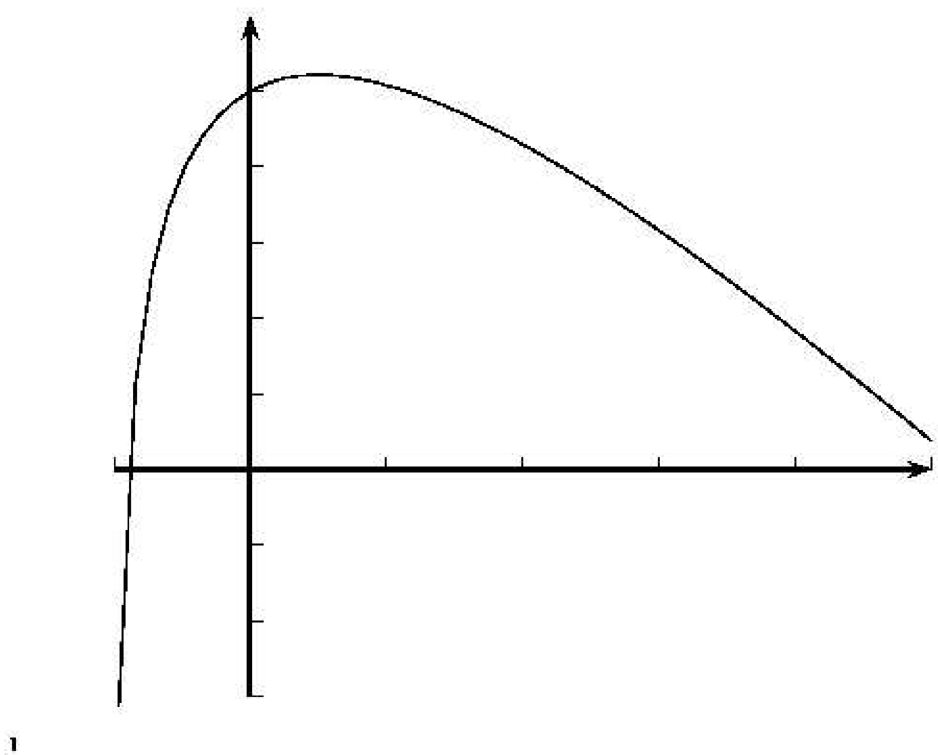
Problème n°6

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$$

où a et b désignent deux réels que l'on déterminera dans la question 2°).



On appelle C_f sa courbe représentative. La figure ci-dessus représente une partie de cette courbe donnée par une calculatrice graphique.

C_f vérifie les conditions suivantes :

• elle passe par le point A(0 ; 5)

• elle admet 1 une tangente horizontale au point d'abscisse .

1°) En utilisant les données de l'énoncé, que peut-on dire du sens de variation de f ?

2°) Déterminer a et b.

PARTIE B :

On suppose désormais que la fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1).$$

1°) a) Calculer la limite de f en -1. Interpréter graphiquement le résultat.

b) vEn admettant que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0,$$

calculer la limite de f en $+\infty$.

2°) Calculer f'(x) et étudier les variations de f

Dresser le tableau de variations. Préciser la valeur exacte du maximum de f .

3°) Tracer C_f et les asymptotes éventuelles dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. (unité graphique : 2 cm)

a) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\alpha < 0 < \beta$ et f $(\alpha) = f(\beta\ ) = 0$.

b) Donner une valeur approchée à 10^-2 près par défaut de . α et de β.

c) En déduire le signe de f (x) sur $]-1;+\infty[$.

5°) Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x.$$

a) Calculer g (x).

b) En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant pour x = 0.

PARTIE C :

Une imprimerie a une capacité de production de 5 000 ouvrages par jour.

Une étude a montré que le coût marginal peut être modélisé par f (q) (en milliers d'euro) ou q désigne la quantité d'ouvrages imprimés (en milliers).

On rappelle que le coût marginal correspond à la dérivée du coût total.

1°) a) Calculer :

$$\int_0^5 f(q)dq.$$

b) En déduire le coût total en euro de fabrication de 5 000 ouvrages.

2°) L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande de 8 000 ouvrages. Il hésite entre deux possibilités :

• 5 000 ouvrages le premier jour puis 3 000 le second

• 4 000 ouvrages pendant deux jours.

Quelle est l'option la plus rentable ?

1 Ecrire sous la forme d'une puissance de e les expressions suivantes :

$$\frac{e^7}{e^2} \qquad \frac{(e^{-1})^4}{e} \qquad \left(exp(e^2)\right)^{-3}$$

$$e^2 \times e^{-3} \qquad exp(1) \times exp(4) \qquad \frac{\left(e^{-2}\right)^4}{3e^2 \times e}$$

2 Ecrire plus simplement chacun des nombres suivants :

$$\ln\left(e^{-\frac{2}{3}}\right) \qquad e^{(\ln 3-1)} \qquad e^{5\ln 3} - 3e^{ln7}$$

$$\frac{e^{3\ln 3}}{e^{\ln 8}} \qquad \frac{e^3}{e^{4+\ln 3}}$$

3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^{2x-3} = 1$

$e^x = 2$

$e^{-2x} = -2$

$e^{3x+1} = e^{1-5x}$

$e^{4x+1} = 3$

$e^{2x} = e^{-x}$

$(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$

$e^{2x-16} = 144$

$e^{(x-4)(2x-1)} = e$

$e^{-1} + e^x = 2$

$e^x - 5 + \dfrac{6}{e^x} = 0$

$2e^x(e^x - 6e^{-x}) = 5e^x$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$e^{3x+1} \geq 0$

$e^{\frac{1}{2}x+1}$

$e^{-5x+2} \leq 1$

$e^{3x+14} > -3$

$e^{2x+2} - e^{3x-5} < 0$

5 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} 3e^{-2x+6}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+3}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (e^{2x} - e^x + 2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1 + e^{-x})$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}-1}{3-e^x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} (e^{3x} - 2e^x + 4)$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-2x^2-x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} (e^{-x} - 3e^{2x} - 2)$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{e^x-1}$$

$$\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}$$

6
Déterminer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous en précisant dans chaque cas l'ensemble de validité des calculs.

$f(x) = e^{-x}$

$g(x) = e^{2x} - 3e^x + 4$

$h(x) = (x+1)e^x$

$k(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$m(x) = ln(3 + e^{-x})$

7 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$3e^{3x-2}$

$5e^{-x}$

$(4x-3)e^{2x^2-3x+5}$

$\dfrac{e^x}{1+e^x}$

$\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

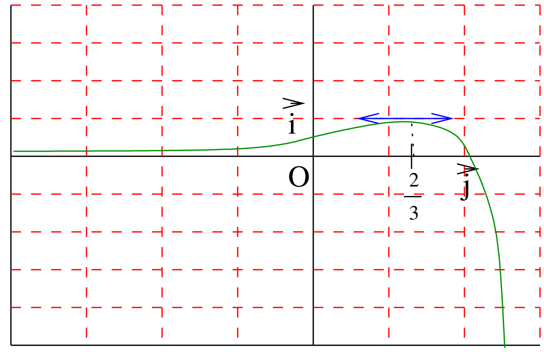
8

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

La courbe C ci-dessous représente la fonction f définie sur par :

$f(x)=(ax+b)e^{cx}$

où a, b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer.



On sait que la courbe C contient les points de coordonnées $(1\,;\,0)$ et $(O; \dfrac{1}{3})$ et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\dfrac{2}{3}$.

1°) Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de f.

2°) Donner f(0), f(1) et f '$(\dfrac{2}{3})$.

3°) Exprimer f '(x) en fonction de a, b et c.

4°) Déduire des questions précédentes les réels a, b et c.

Formulaire

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $]0\,;+\infty[$.

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

$e^x > 0$ pour tout x.

$e^0 = 1$

$e^1 = e$

$e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

$e^{a+b} = e^a \times e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$(e^a)^n = e^{na}$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$(e^x)' = e^x$.

$(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$.

$(e^u)' = u' \times e^u$

Une primitive de e^x est e^x.

Une primitive de e^{ax+b} est $\dfrac{1}{a}e^{ax+b}$

Annales du bac

France Juin 2002

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^{-4}$.

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Etudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 appartenant à $]1\,;\,2[$.

Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de x_0.

3. Déduire des résultats précédents le signe de f(x) sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B :

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x exprimée en tonnes, sa capacité de production π ne pouvant dépasser 3 tonnes.

Le coût total de fabrication de ce produit, en centaines de milliers d'euros, est donné par :

$C_T(x) = (x - 3)e^x + 3x + 4$.

Le coût moyen est défini sur $]0\,;\,3]$ par la formule suivante

$C_m(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.

1. Pour tout x de $]0\,;\,3]$ calculer C'm(x) et vérifier que l'égalité suivante est vraie :

$C'm(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.

En déduire le sens de variation de Cm sur $]0\,;\,3]$.

2. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum ?

Quel est le coût moyen minimum (arrondi au millier d'euros) d'une tonne de ce produit ?

Partie C :

Une tonne du produit fabriqué est vendue 300 000 euros ; toute la production est vendue.

1. a) Le bénéfice algébrique, en centaines de milliers d'euros, réalisé après la fabrication et la vente de x tonnes du produit est noté B(x).

Montrer l'égalité suivante : $B(x) = (3 - x)e^x - 4$.

b) Etudier le sens de variation de B sur $[0\,;\,3]$.

Quelle est la production pour laquelle le bénéfice est maximum ?

2. a) Tracer la courbe représentative de B dans un plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm pour une tonne en abscisse et 2 cm pour 100 000 euros en ordonnée).

b) A l'aide du graphique, déterminer à 0,1 près les quantités à produire pour que l'entreprise réalise un gain.

Annales du bac

France Juin 2003

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,50]$ par $g(x) = (x-15)^2\ e^{-\frac{x}{3}}$

1. On note g' la fonction dérivée de g sur $[0\,;\,50]$.

a) Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{3}(x-15)(21-x)\ e^{-\frac{x}{3}}$.

b) Etudier le signe de g' sur $[0\,;\,50]$.

c) Dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;\,50]$.

2. Soit G la fonction définie pour tout x de $[0\,;\,50]$ par :

$G(x) = 3(-x^2 + 24x - 153)e^{-\frac{x}{3}}$.

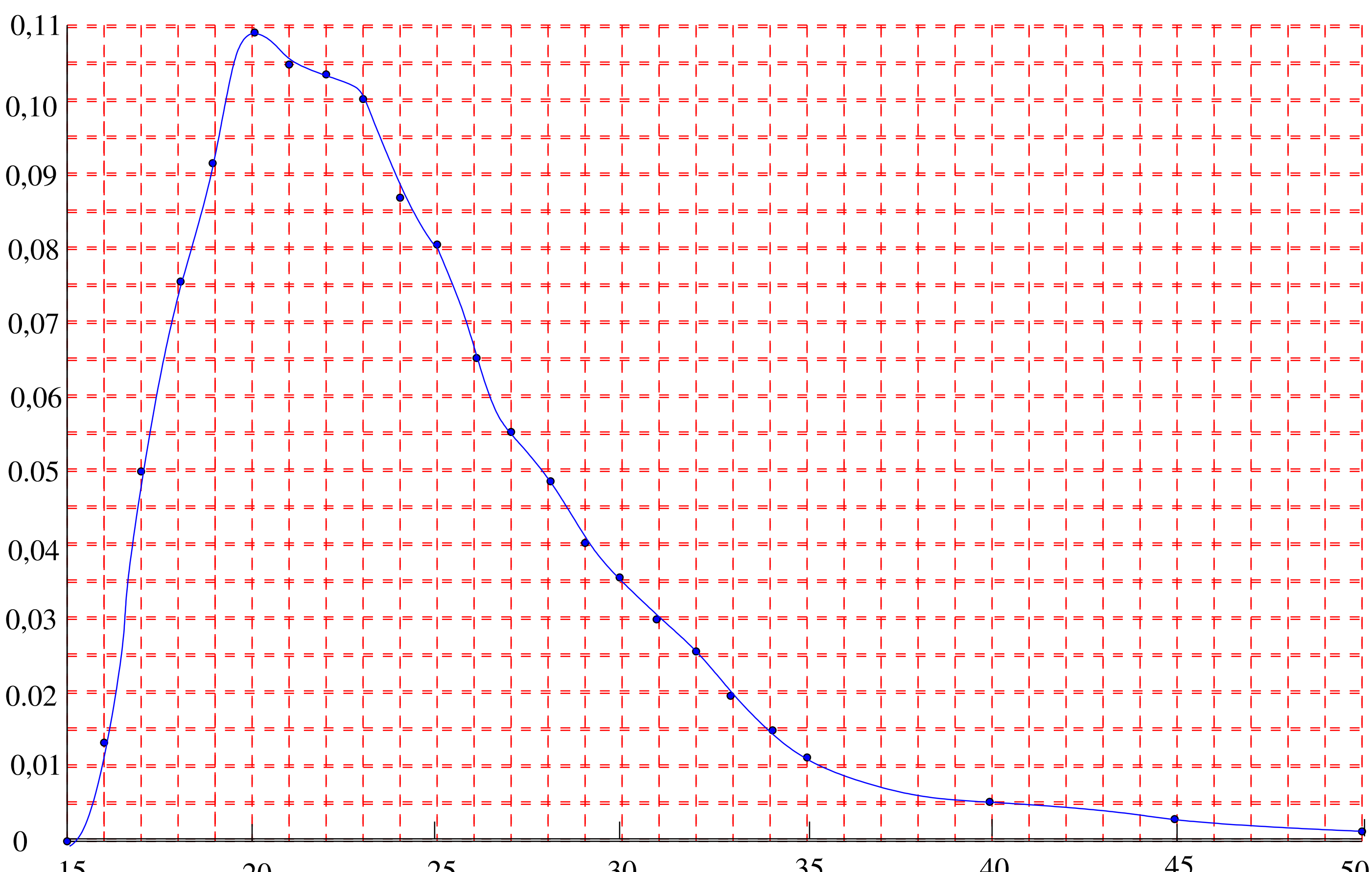
Montrer que G est une primitive de g sur $[0\,;\,50]$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $[15\,;\,49]$ par : $f(x) = \dfrac{107\ e^7}{36000}\ g(x)$.

1. Justifier que f admet les mêmes variations que g sur l'intervalle $[15\,;\,49]$.

2. La représentation graphique de f dans un repère orthogonal R est donnée ci-dessous.



Calculer l'aire A, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 15 et x = 49 (on utilisera le résultat de la question A. 2.).

On donnera la valeur exacte de A, puis sa valeur arrondie à $10^{-1.}$

Partie C :

Dans une population et pour une génération donnée, le taux de fécondité t(k) à l'âge k, où k est un entier compris entre 15 et 49, est le rapport entre le nombre de naissances chez les mères d'âge k et le nombre de femmes d'âge k de cette génération.

Le nuage de points représentant le taux de fécondité d'une population pour une génération donnée (l'âge étant représenté en abscisse et le taux de fécondité en ordonnée) est représenté dans le repère R .

On appelle descendance finale la somme des taux de fécondité par âge t(k) ; elle est donc égale à :

$$\sum_{k=15}^{k=49} t(k)$$

On suppose qu'elle peut être modélisée par l'aire délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 15 et x = 49.

1. Utiliser les résultats de la partie B afin d'estimer la descendance finale de cette génération (on donnera un résultat arrondi à 10^{-1}).

2. Une valeur arrondie à 10^{-2} de la somme des taux de fécondité par âge est 1,20.

Comparer ce résultat avec celui obtenu à la question précédente.

Le modèle choisi paraît-il adapté ?

3. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle [15 ; 49].

Peut-on affirmer que la descendance finale est égale à cette valeur moyenne ?

Justifier votre réponse.

Pondichéry Mars 2003

Ce problème a pour objectif d'étudier le prix d'équilibre entre l'offre et la demande d'un objet donné, dans une situation de concurrence parfaite.

PARTIE A : Etude de la demande

On suppose que le prix unitaire qu'acceptent de payer les consommateurs en fonction de la quantité x disponible sur le marché est modélisé par la fonction g définie sur $[0\,;+\infty([$ par :

$$g(x) = \frac{50}{x^2 + x + 1}.$$

Le prix unitaire g(x) est exprimé en euros est la quantité x en millions d'objets.

1. Calculer la limite de g(x) en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Calculer g'(x).

b) Etudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$ et donner le tableau de variation.

3. Soit C_g la courbe représentative de g dans un repère orthogonal du plan.

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_g au point d'abscisse nulle.

4. Tracer T et C_g (unités graphiques : 2 cm pour une unité en abscisse, 2 cm pour 10 unités en ordonnées).

PARTIE B : Etude de l'offre

Les producteurs acceptent de fabriquer une quantité x exprimée en millions d'objets si le prix unitaire de l'objet atteint une valeur minimale.

On suppose que ce prix minimal (qui dépend de la quantité x) est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3e^{0,25x}$$

. Le prix unitaire f(x) est exprimé en euros.

1. Calculer la limite de f(x) en $+\infty$.

2. Etudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

3. Tracer C_f dans le même repère que C_g.

PARTIE C : Recherche du prix d'équilibre

Dans un marché à concurrence parfaite, la « loi de l'offre et de la demande » tend à dégager un prix d'équilibre p_0 pour lequel l'offre des producteurs est égale à la demande des consommateurs. On appelle q_0 la quantité associée à p_0.

1. Déterminer graphiquement un encadrement entre deux entiers consécutifs d'une part du prix d'équilibre p_0 et d'autre part de la quantité associée q_0.

2. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ pour tout x de $[0\,;+\infty[$.

a) Déduire des parties A et B le sens de variation de h sur $[0\,;+\infty[$.

b) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique q_C sur [2 ;3].

c) Donner à l'aide de la calculatrice une valeur arrondie à 10^{-2} de q_0.

3. Calculer une valeur approchée du prix d'équilibre p_0, on donnera le résultat arrondi à 10^{-2} près.

PARTIE D : Surplus des producteurs

On appelle surplus des productions le gain supplémentaire que réalisent les producteurs en vendant au prix p_0. Il est obtenu à partir de l'expression :

$$S_p = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(x)\ dx$$

Il est exprimé en millions d'euros.

1. Donner une interprétation graphique de S_p (on interprétera $p_0 q_0$ comme l'aire d'un rectangle).

2. a) Calculer S_p en fonction de p_0 et q_0.

b) Déterminer une valeur arrondie à 10^{-1} de S_p exprimée en millions d'euros.

La Réunion juin 2003

L'ob jet de ce problème est de rechercher un coût moyen de production minimal, connaissant le coût marginal.

PARTIE I : **Des résultats préliminaires susceptibles d'être utilisés ensuite.**

1°) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - 2 + e^{-x}$$

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer f' dérivée de f , ainsi que le signe de f '(x) suivant les valeurs de x.

c) Etablir le tableau de variations de la fonction f .

d) Prouver que, dans $[0\,;\,1]$, l'équation f (x) = 0 admet une et une seule solution α.

Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

e) En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de f (x).

2°) Montrer que la dérivée de la fonction g : $x \ \rightarrow \ xe^{-x}$ est la fonction g' : $x \ \rightarrow \ (1-x)e^{-x}$.

PARTIE II : **Recherche du coût total**

Une usine fabrique un produit dont le coût marginal C en milliers d'euros, est donné par la formule :

$$C(x) = 3x^2 - 4x + 2 + (x-1)e^{-x}$$

. x représentant la quantité de produit en centaines de grammes.

On rappelle que le cout marginal C peut être assimilé à la dérivée du coût total C_T .

Déterminer $C_T(x)$ sachant que $C_T(0) = 0$.

PARTIE III

Pour une production de x centaines de grammes, on appelle $C_m(x)$ le coût moyen d'un gramme, en milliers d'euros.

La fonction C_m est définie sur $[0; +\infty[$

1°) Prouver que

$$C_m(x) = \frac{x^2 - 2x + 2 - e^{-x}}{100}$$

2°) a) Calculer $C_m(x)$ et prouver que $C'_m(x)$ et f (x) ont le même signe.

b) En déduire les variations de C_m . On ne demande pas les calculs de limites.

c) Donner une valeur approchée de la production donnant un coût moyen minimal.

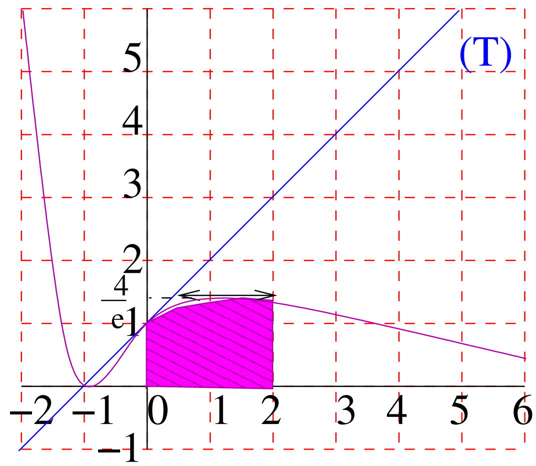
d) Calculer, au centième près, le coût moyen en euros pour une production de 76 grammes.

Amérique du sud Décembre 2001

PARTIE A :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Sur le graphique ci-contre, la courbe (C) représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite (T) est la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0.



1°) A partir du graphique, reproduire et compléter le tableau suivant :

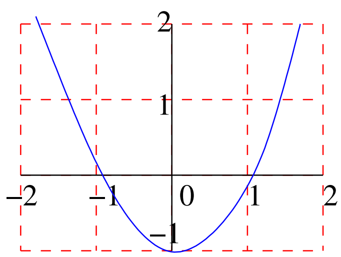
x	-1	0	1
$f(x)$			
$f'(x)$			

Justifier les valeurs de f (-1) et f (0).

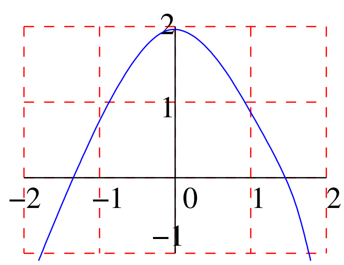
2°) La fonction f a pour dérivée une fonction f' dont la courbe est l'une des trois suivantes.

Indiquer laquelle en justifiant votre réponse.

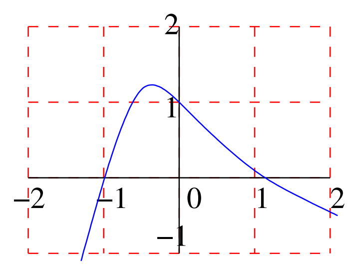
n°1



n°2



n°3



3°) Expliquer graphiquement pourquoi l'aire de la partie hachurée , exprimée en unités d'aire, est un nombre comprise entre 2 et $\frac{8}{e}$.

PARTIE B :

On considère la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$$

1°) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) \geq 0$.

2°) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) On admet que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Déterminer alors la limite de f en $+\infty$.

Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f ? Si oui préciser laquelle.

3°) a) Montrer que la dérivée de f est définie par $f'(x) = (-x^2 + 1)e^{-x}$.

b) Etudier alors les variations de f suivant les valeurs de x. Dresser le tableau de variation de f .

4°) a) Montrer que, sur l'intervalle [1 ; 3], l'équation f (x) = 1 admet une solution α unique.

b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

5) En fait la représentation graphique de la fonction f est la courbe (C) dessinée dans la partie A.

a) On considère la fonction g définie sur R par $g(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$. Calculer g' (x).

b) Calculer :

$$\int_0^2 f(x)dx$$

Donner la valeur exacte puis une valeur approchée
par excès à 10^{-2} près.

c) Interpréter graphiquement le résultat précédent.

France septembre 2000

Une société est spécialisée dans l'exploitation de gravières (le gravier exee e e e trait est utilisé pour la construction d'autoroutes). Elle doit étudier le plan d'exploitation d'un nouveau site d'extraction. Voici les conditions d'exploitation définies par la direction :

L'exploitation débutera le 1er janvier 2001. La production journalière de gravier devra rapidement augmenter pour atteindre son maximum après un an et demi de travail, puis elle devra décroître lentement.

On traduit en langage mathématique ces consignes afin de modéliser la production journalière et la production totale.

On choisit habituellement pour modéliser la production journalière du site une fonction f définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(t) = (at^2 + bt + c)e^{-t}$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

f (t) représente la production journalière de gravier extrait (en milliers de tonnes), t étant la durée écoulée depuis le début de l'ouverture du site (t est en années, c'est un réel positif). On appelle (C) la courbe représentative de f.

Les consignes peuvent se traduire ainsi : • (C) passe par le point O de coordonnées $(0\,;0)$.

• La tangente à (C) en O a pour coefficient directeur 3.

• La courbe (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1,5.

1°) Montrer que sous ces contraintes f est définie par :

$$f(t) = (2t^2 + 3t)e^{-t}$$

2°) Déterminer la dérivée f' de f et montrer que :

$$f'(t) = (-2t + 3)(t + 1)e^{-t}$$

Etudier les variations de la fonction f pour t$\geq$ 0.

On admet que :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = 0.$$

Préciser le signe de f sur $[0\,;+\infty[$.

3°) Calculer le maximum de f sur $[0\,;+\infty\,[$. En donner la valeur arrondie à 10^{-3} près.

Quelle est la production journalière maximum prévue sur ce site, e et à quelle date sera-t-elle atteinte ?

4°) Tracer la courbe (C) sur une feuille de papier millimétré (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 5 cm sur l'axe des ordonnées).

5°) Montrer qu'il existe une seule valeur t_0 , comprise entre 3 et 4, telle que $f(t_0)$ soit égale à 1 (soit 1000 tonnes par jour).

Donner è l'aide de la calculatrice une valeur de t_0 arrondie à 10^{-2} près.

6°) Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par :

$$F(t) = (-2t^2 - 7t - 7)e^{-t}$$

est une primitive de f sur $[0\,;+\infty\,[$.

7°) Considérant que la gravière sera exploitée 200 jours par an, on admettra que la production totale prévue pendant la durée t est donnée par la formule :

$$P(t) = 200 \times \int_0^7 f(x)dx.$$

a) Transformer l'écriture de P (t) en utilisant le résultat de la question 6 et e e étudier les variations de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty\,[$.

b) On prévoit que l'exploitation de ce site doit être interrompue au bout de cinq ans. Calculer à 1000 tonnes près par défaut la quantité de gravier qui aura été extraite, ainsi que la production moyenne annuelle sur cette période.

Révisions pour le bac blanc n°1

Statistiques

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la dette des pays du Tiers Monde entre 1978 et 1992 (en milliards de dollars).

Année	1978	1982	1986	1990	1992
Rang de l'année (x_i)	0	4	8	12	14
Dette (y_i)	383	753	1089	1346	1510

1°) Le plan est reporté à un repère orthogonal.
Les unités graphiques sont : 1 cm pour 2 ans en abscisses ; 1cm pour 100 milliards de dollars en ordonnées.

Représenter le nuage de points $(x_i ; y_i)$ et le point moyen M de cette série.

2°) **Utilisation de la méthode de Meyer.**
a) Calculer le point moyen G_1 des trois premières colonnes et le point moyen G_2 des deux autres colonnes de cette série statistique.
b) Déterminer l'équation Δ de la droite (G_1G_2).
c) Tracer Δ.

3°) **Méthode des moindres carrés.**
a) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite D de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. (Les coefficients de l'équation seront données sous forme décimale approchée à 10^{-1} près par défaut).
b) Tracer D

4°) Estimer, à 1 milliard de dollars près, par chacune des deux méthodes, le montant prévisible de la dette des pays du Tiers Monde en 2000.

Programmation linéaire

Le gérant d'un hotel souhaite renouveler le linge de toilette de son établissement. Il a besoin de 90 draps de bain, 240 serviettes de 240 gants de toilette.
Une première entreprise de vente lui propose un lot A conprenant 2 draps de bain, 4 serviettes et 8 gants de toilette. pour 200 F.⁻ Une deuxième entreprise vend pour 400 F un lot B de 3 draps de bain, 12 serviettes et 6 gants de toilette.
Pour répondre à ses besoins, le gérant achète x lots A et y lots B.

1°) Traduire par un système d'inéquations les contraintes auquelles satisferont x et y.

2°) On considère un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
A tout couple (x ;y), on associe le point M de P de coordonnées x et y, en convenant que 2 cm représentent 5 lots sur chaque axe, soit 4mm par lot.
Représenter dans P l'ensemble G des points M(x ;y) satisfaisant aux inéquations :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases}$$

On hachurera la partie du plan formée des points pour lesquels les contraintes ne sont pas vérifiés.

3°) a) Exprimer en fonction de x et de y la dépense en francs occasionnée par l'achat de x lots A et de y lots B.

b) Est-il possible de procéder aux achats nécessaires avec 5000 F ? On justifiera la réponse.

4°) Déterminer graphiquement, en précisant la démarche choisie, les nombres de lots A et de lots B à acheter pour avoir une dépense minimale.
Quelle est cette dépense ?

Suites numériques

Jean et Pierre sont deux jumeaux ; Jean, qui est fumeur, dépense 3000 F par an pour l'achat de ses cigarettes. Pierre, qui ne fume pas, lui demande d'imaginer les économies qu'il réaliserait s'il plaçait cette somme plutôt que de continuer à fumer.
Il lui propose de déposer tous les ans, le 2 janvier cette somme de 3000 F sur un compte rémunéré à intérêt composés par la banque, au taux annuel de 3%. La banque ajoute chaque année, le 31 décembre, les intérêts acquis sur le compte.
Le 2 janvier 1999, il verse 3000 F et les intérêts acquis sont comptabilisés le 31 décembre 1999. Tous les ans, le 2 janvier, il verse à nouveau 3000 F.

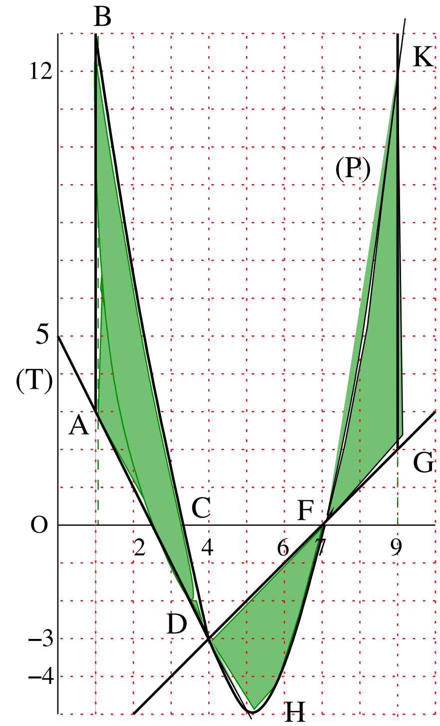
1°) Quelle est la somme disponible sur le livret aux dates suivantes :
a) le 3 janvier 2000 ?
b) le 3 janvier 2001 ?

2°) On note u_0 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 1999, u_1 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 20001, u_n la somme disponible sur le livret le 3 janvier de l'année 1999+n, où n désigne un entier naturel.
Montrer que l'on a la relation $u_{n+1} = 1,03\ u_n + 3000$

3°) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 100000$.
a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

4°) Pierre affirme qu'en moyenne, un fumeur s'arrête après avoir fumé pendant 30 ans.
De quelle somme Jean aurait-il pu disposer le 3 janvier 2029 ?

Calcul d'aires



Sur le croquis ci-contre, la courbe passant par les points B(1 ;12), C(3 ;0), D(4; −3), H(5 ;−4), F(7 ;0) et K(9 ;12) est une portion de parabole (P) d'équation :

$y = x^2 - 10x + 21$

L'objet de cet exercice est le calcul de l'aire de la partie en vert sur le croquis.

1°) Ecrire une équation de la tangente (T) à (P) au point (4; −3).

2°) Donner une équation de la droite (FD).

3°) Calculer l'aire de la partie en vert.

Probabilités

Une salle de spectacle propose pour la saison des abonnements pour 4, 5 ou 6 spectacles.
Dans la population des abonnés, la répartition est la suivante :

• 43,5% ont choisi l'abonnement 4 spectacles ;
• 33% ont choisi l'abonnement 5 spectacles ;
• le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

D'autre part, 65% des abonnés sont des jeunes de moins de 25 ans.
Dans cette population, la répartition est différente :

• 40% ont choisi l'abonnement 4 spectacles ;
• 40% ont choisi l'abonnement 5 spectacles ;
• le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

On interroge un abonné au hasard.

• On note A l'événement : "l'abonné interrogé a moins de 25 ans"".
• On note B l'événement : "l'abonné interrogé a choisi 5 spectacles".

1°) a) Qu'elle est la probabilité que l'abonné interrogé ait 25 ans ou plus ?

b) Sachant que l'abonné a moins de 25 ans, quelle est la probabilité qu'il ait choisi 5 spectacles ?

c) Décrire l'événement (A∩ B) et démontrer que la probabilité A∩ B est égale à 0,26.

2°) a) Démontrer que p($\bar{A} \cap B$) est égale à 0,07.

b) En déduire la probabilité conditionnelle de B sachant que $\bar{A}$ est réalisé.

3°) On interroge au hasard 3 abonnés, quelle est la probabilité que deux d'entre eux exactement aient moins de 25 ans.

3°) L'abonnement pour 4 spectacles coûte 50 €, celui pour 5 spectacles coûte 60 €, et celui pour 6 spectacles coûte 70 €.

On appelle X la variable aléatoire égale à la somme dépensée.

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique.

Exercices sur les fonctions

1 Calculer les limites suivantes et indiquer les asympôtes qui en découlent :
1°)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5}{1-3x^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{4x^3+5x^2-6x+3}$$

$$\lim_{x\to2^+} \frac{3x-8}{x-2}$$

$$\lim_{x\to3^-} \frac{5}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+5}$$

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

2°)

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{2-x}$$

$$y = 2x - 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y]$$

2 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{2x^2-1}{1-3x}$

$f(x) = \sqrt{x} \times (2x-1)$

$f(x) = \dfrac{3}{(5x+1)^3}$

$f(x) = \sqrt{x^2-3x+6}$

3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x + 1$.

Problème économique

Partie A

Dans cette partie, on fait une étude graphique.

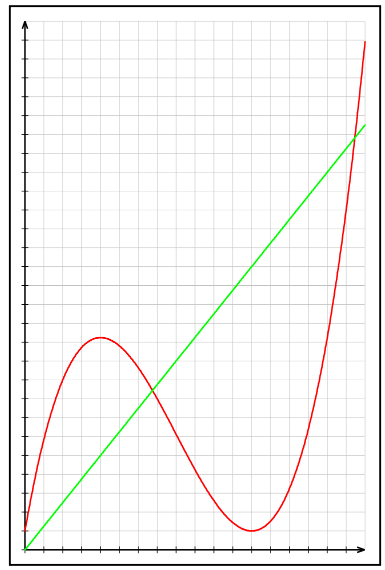
Une entreprise fabrique des jouets qu'elle vend par lots. On admet que le coût de fabrication en euros d'un nombre x de lots, x appartenant à l'intervalle [0 ;18] est donné par la fonction dont la courbe C est la courbe en rouge du graphique ci-contre.

Chaque lot est vendu 125€.

La recette esr donc donnée par R(x)=125x.

La droite D représentant R est dessinée en vert dans le même repère.

En abscisse une graduation représente 1 lots.
En ordonnées, une graduation représente 100€.



1°) L'entreprise ne vend que des nombres entiers de lots. Déterminer graphiquement les valeurs du nombre x de lots pour lesquels l'entreprise réalise un bénéfice.
Justifier le réponse.

2°) a) On appelle M le point d'abscisse 8 qui est sur C . Donner une valeur approchée de son ordonnée.

b) On appelle N le point d'abscisse 8 qui est sur D.
calculer son ordonnée.

c) Mesurer sur le graphique la longueur MN.
Que représente-t-elle ?

3°) En s'inspirant de la méthode graphique qui précède, donner en le justifiant , le nombre de lots à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.

Partie B

L'entreprise désire faire une étude plus précise de son bénéfice. On étudie la fonction f définie sur l'intervalle [0 ;18] par :

f(x)=$4x^3 - 96x^2 + 576x + 100$

1°) Calculer f'(x).

2°) Etudier le signe de f'(x) sur [0 ;18].

3°) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur [0 ;18]
La fonction f a pour représentation la courbe C.

4°) Compléter le tableau suivant :

x	12	13	14
R(x)−f(x)			

6°) a) Que représente la différence R(x)−f(x) ?

b) Les résultats obtenus dans le tableau sont-ils conforme à ce qui a été constaté graphiquement dans la question A ?

Devoir sur les fonctions et les limites

Exercice n˚1 :

Calculer les limites suivantes et indiquer quelles sont les asymptote que l'on peut en déduire.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+1}{x^3-3} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{-2}{1-x^2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x^3+1}{1-2x^3} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$$

Exercice n˚2 :

On rappelle que la fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$ et que $-1 \leq cosx \leq 1$.

Soit la fonction $f(x) = 5 + cosx\frac{5+cosx}{1-x}$

1˚) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2˚) Montrer que $\frac{4}{1-x} \leq f(x) \leq \frac{6}{1-x}$.

3˚) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f(x). En déduire une asymptote à la courbe de f.

4˚) Est-il possible de déterminer les limites de f(x) en 1 par la même méthode ?

Exercice n˚3 :

La fonction ln (logarithme) est définie sur $]o;+\infty[$. On a

- ln(1)=0.
- La limite de ln x en 0 est $-\infty$.
- La limite de ln x en $-\infty$ est $+infty$.

Soit la fonction $f(x) = ln\left(\frac{2-x}{2+x^2}\right)$ définie sur $]-\infty;2[$.

1˚) Ecrire f(x) comme composée de la fonction ln et d'une autre fonction.

2˚) Calculer les limites de f(x) aux bornes de l'ensemble de définition.

Exercice n˚4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2x^2-x+3}{x+1}$.

1˚) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

2˚) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

3˚) Déterminer par un calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

4˚) Résoudre l'inéquation $\frac{-2x^2-x+3}{x+1} \leq 0$ et interpréter graphiquement le résultat.

5˚) Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation.

6˚) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x$\neq -1$, f(x)= ax+b+$\frac{c}{x+1}$.

7˚) En déduire une asymptote . Quelles sont les autres asymptote à la courbe ?

8˚) Tracer la courbe de f.