Classe de première S

Exercices de Mathématiques

Révisions de seconde

1 Soit f la fonction à variable réelle définie par : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

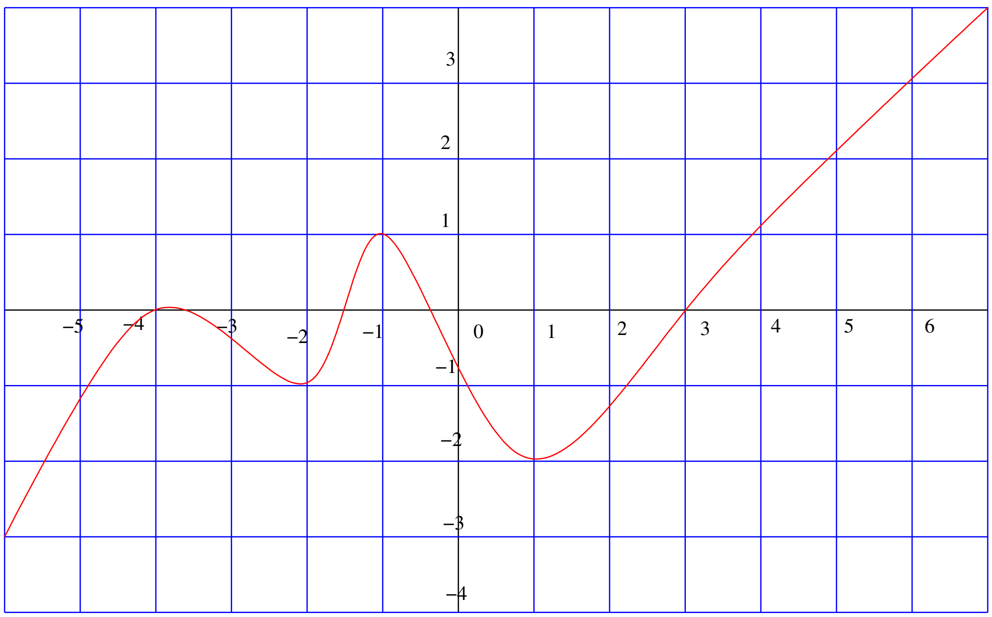
$$x \mapsto 2x^2\text{-}3$$

a) Calculer les images de -3 et de $\sqrt{2}-1$.

b) Déterminer les antécédants de 5 ; 3 ; 0 et -4.

c) Calculer les images des entiers compris entre -3 et 3 puis tracer la représentation graphique de f.

2 Voici la représentation graphique d'une fonction f, répondre aux questions suivantes :



a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Quelles sont les images de 4, 0, 7 et -2 ?

c) Donner une valeur approchée de f(-3), f(-1) et f(2).

d) Quels sont les antécédants de 0, 1, -3 et -4 ?

e) Sur quels intervalles f est-t-elle croissante ? décroissante ?

f) Dresser le tableau de variation de f.

g) Quels sont les extrémum de f ? Pour quelles valeurs sont-ils atteints ?

h) Résoudre graphiquement les équations : f(x)=-2, f(x)=-1 et f(x)=-4.

i) Résoudre graphiquement les inéquations : $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq$-2

j) Dresser le tableau de signes de f.

3 a) Tracer une représentation graphique des fonctions f et g dont voici le tableau de variation :

x	-4		-1		0		3		5
f(x)	0	↘	-2	↗	1	↘	0	↗	2

x	-2		0		1		3
g(x)	0	↗	2	↗	3	↘	-2

b) Résoudre graphiquement l'équation : f(x)=0.

c)Comparer g(-1) et g(1)

f(2) et 0

f(-3) et f(4).

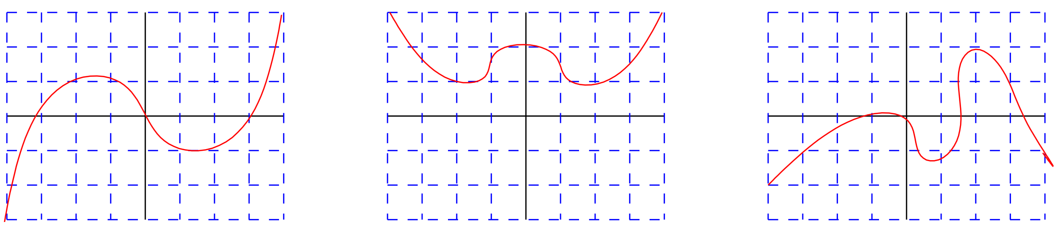
4 On sait que la fonction f est croissante sur[-3 ;0] et décroissante sur [0 ;5]. On a f(-3)=2 ; f(0)=4 et f(5)=-2.

a) Dresser le tableau de variationde f.

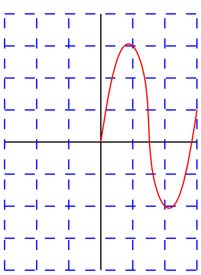
b) Compléter par $<$ ou $>$.

- -2 $< x <$-0, 5 alors f(-2) ..... f(x) ..... f(-0,5)
- 1 $< x <$ 2 alors f(1) ..... f(x) .....f(2)
- $x > 3$ alors f(x) ..... f(3)
- $x \in [-3\,;0]$ alors 2 .....f(x) .....4.

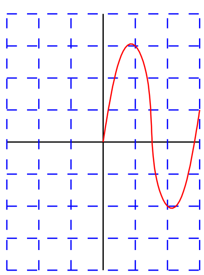
5 a) Les fonctions dont voici une représentation graphique sont-elles paires ou impaires ?



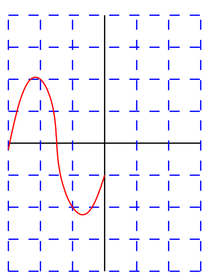
b) Compléter les représentations graphiques suivantes pour qu'elles définissent des fonctions paires ou impaires.



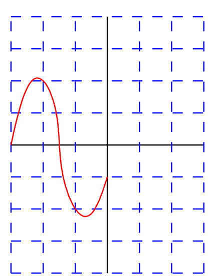
f est paire



f est impaire



f est paire



f est impaire

6 Les fonctions suivantes sont$-$elles paires ? impaires ?

$$f(x) = 2x^2\text{-}3 \qquad g(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad h(x) = 3x^3\text{-}2x$$

$$i(x) = \frac{x}{x^2+4} \qquad j(x) = 2x^2\text{-}3x+1 \qquad k(x) = \frac{5}{8}$$

7 Soit ABED un trapèze rectangle en A de bases [AB] et [DE] tel que DE=6 cm, AD=3 cm et AB=2 cm. Soit C un point du segment [DE]. On note CE=x.

Soit f(x) l'aire de ABCD, g(x) l'aire de BCE, h(x) le périmètre de ABCD et k(x) le périmètre de BCE.

1°) Dans quel intervalle le nombre x peut-il varier ?

2°) Tracer deux figures, l'une pour x=1, l'autre pour x=4.

3°) Calculer les images de 1 et de 4 pour chacune des fonctions f, g, h et k.

4°) Exprimer en fonction de x, f(x), g(x), h(x) et k(x).

5°) Pour quelle valeur de x les aires de ABCD et de BCE sont-elles égales ?

6°) Pour quelle valeur de x les périmètres de ABCD et de BCE sont-ils égaux ?

Fonctions en première

8 Pour les fonctions carrées suivantes, donner le tableau de variation puis tracer la courbe.

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ $\qquad g(x) = -x^2 + 4x + 1$ $\qquad$ h$(x) = 2x^2 - 6x + 4$ $\qquad i(x) = -2x^2 + x$

9 1°) Tracer les représentations graphiques des fonctions usuelles :

$f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad h(x) = \sqrt{x}$ $\qquad i(x) = x^3$

2°) En utilisant une translation, tracer sur l'un des graphiques précédents, la représentation graphique de :

$l(x) = (x-3)^2$ $\qquad m(x) = \sqrt{x-2}$ $\qquad n(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\qquad p(x) = (x+2)^3$

$q(x) = \sqrt{x} + 2$ $\qquad r(x) = x^2 - 5$ $\qquad s(x) = 1 + \frac{1}{x}$ $\qquad t(x) = (x-3)^2 + 2$

3°) Sur un autre graphique, tracer successivement les représentations graphiques de :

$A(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad B(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\qquad C(x) = \dfrac{1}{x+1} - 3$ $\qquad D(x) = \left|\left(\dfrac{1}{x+1} - 3\right)\right|$

$E(x) = -\left(\dfrac{1}{x+1} - 3\right)$ $\qquad F(x) = \dfrac{1}{|x|+1} - 3$ $\qquad G(x) = \dfrac{1}{-x+1} - 3$

10 Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

1°) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2°) Déterminer a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$.

3°) Tracer la représentation graphique de $g(x) = \dfrac{-2}{x}$.

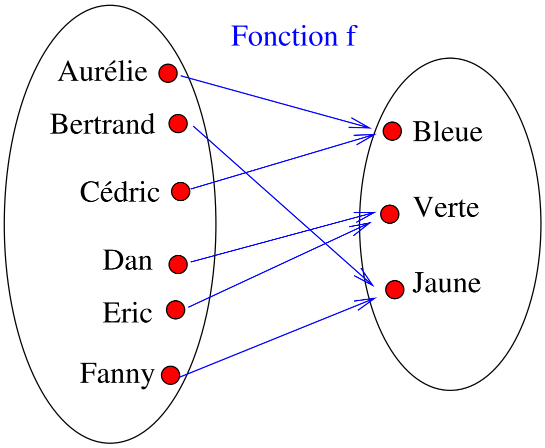
4°) En déduire la représentation graphique de f.

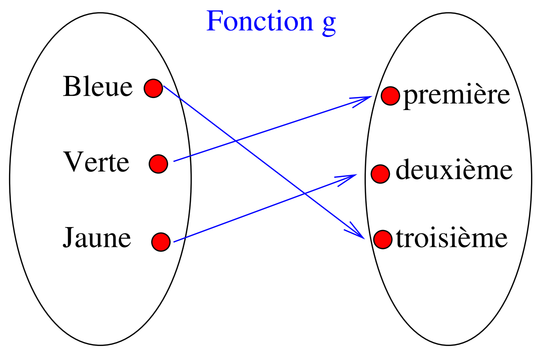
5°) Tracer le tableau de variations de f.

11 Soit A l'ensemble des prénoms d'un groupe d'amis qui participent à un tournoi sportif. Soit B la couleur des équipes et C le classement à l'issue des matchs.

On appelle f la fonction qui a chaque personne fait correspondre la couleur de son équipe. On appelle g la fonction qui à chaque équipe fait correspondre son classement. g∘ f sera donc la fonction qui a chaque personne fait correspondre son classement.

A l'aide des diagrammes de f et de g, tracer le diagramme de g∘ f.





12 Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ pour les fonctions suivantes :

1°) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 2x + 1$

2°) $f(x) = \frac{1}{x}$. et $g(x) = 2x + 1$

3°) $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1)$

4°) Est-ce que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont égales ?

13 Soit $a(x) = x^2$ $b(x) = 3x + 1$ $c(x) = \frac{1}{x}$ $d(x) = \sqrt{x}$.

Ecrire les fonctions suivantes comme composées des fonctions a, b, c et d.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad g(x) = 3 \times \frac{1}{x} + 1 \qquad h(x) = (3x + 1)^2$$
$$k(x) = 3x^2 + 1 \qquad l(x) = \sqrt{x^2} \qquad m(x) = \frac{1}{3x + 1}.$$

14 1°)Rappeler l'ensemble de définition et le sens de variation des fonctions usuelles :

$$f(x) = ax + b \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = \sqrt{x}$$
$$j(x) = x^3 \qquad k(x) = \frac{1}{x} \qquad l(x) = |x|.$$

2°) Ecrire les fonctions suivantes comme composées de fonctions usuelles et en déduire leur sens de variation sur l'intervalle donné.

$A(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ sur $[0\,;+\infty[$.

$B(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ sur $]-\infty; 0]$.

$C(x) = \sqrt{2 - x}$ sur $]-\infty; 2]$.

$D(x) = 3 - \frac{2}{x + 1}$ sur $]-1; +\infty[$.

15 Ecrire les fonctions suivantes sous forme de somme ou de produit de fonctions usuelles et en déduire leur sens de variation lorsqu'il découle des propriétés du cours.

$A(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0[$.

$B(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. sur $]0; +\infty[$.

$C(x) = 2x + 1 + \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

$D(x) = (2x + 1) \times \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

16 Soit la fonction $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Montrer que $g(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2 + 1}$.

c) Soit $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x + 1}$. Tracer la représentation graphique de f en utilisant la fonction u : $x \mapsto -\frac{2}{x}$ et une translation à préciser.

d) Donner le tableau de variation de f.

e) Montrer que g est la composée de la fonction f et d'une autre fonction.

f) En déduire le tableau de variation de g.

17 1°) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Calculer $g(\sqrt{2})$ et $g(\sqrt{3} + 1)$.

c) Déterminer l'antécédent de $\frac{5}{2}$ par g.

d) Déterminer a et b tels que $g(x) = a + \dfrac{b}{x - 1}$.

e) En utilisant une translation et la fonction u : $x \mapsto \frac{b}{x}$, tracer la représentation graphique de g.

f) Résoudre graphiquement : $g(x) = 1$ $\quad g(x) \geq 0$ $\quad g(x) = 2x - 1$.

2°) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

a) Déterminer a et b tels que $f(x) = (x - a)^2 + b$.

b) En utilisant une translation et la fonction v : $x \mapsto x^2$, tracer la représentation graphique de f.

3°) a) Montrer que f(x)=g(x) $\iff$ $x^3 + x^2 - 7x + 2 = 0$.

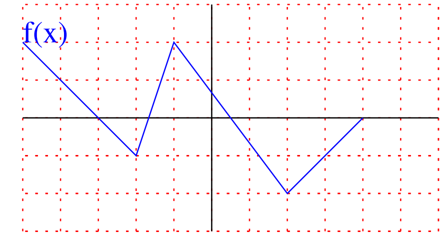
b) Calculer f(2) et g(2).

c) Montrer que $x^3 + x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(x^2 + 3x - 1)$.

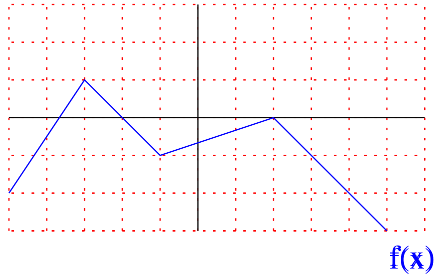
d) Résoudre l'équation $x^3 + x^2 - 7x + 2 = 0$.

e) En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes de f et de g.

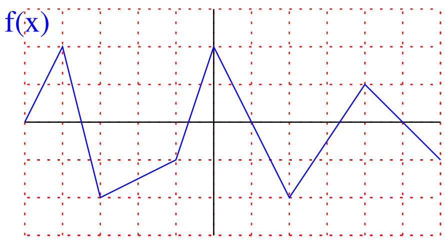
18



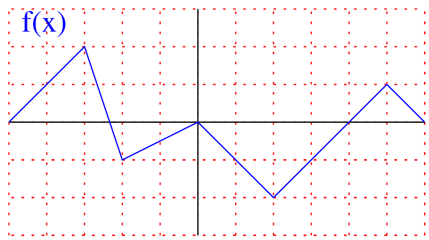
Tracer g(x)=f(x−2)



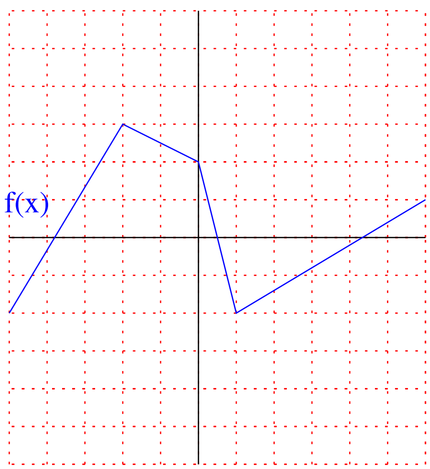
Tracer g(x)=f(x)+1



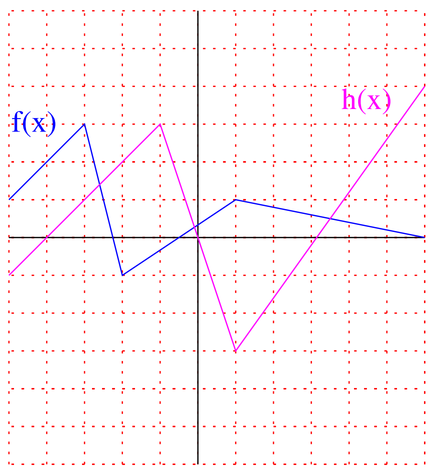
Tracer g(x)=|f(x)|



Tracer g(x)=−f(x)



Tracer g(x)= 2f(x)

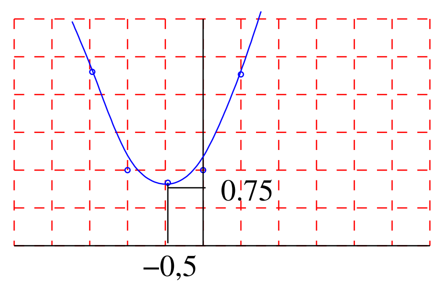


Tracer g(x)=f(x)+h(x)

Devoir n°1

I Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f (x) $= x^2 + x + 1$.

Sa courbe représentative dans un repère orthonormé est la parabole tracée ci-contre.



1°) Par lecture graphique :

a)Donner le signe de f .

b) Donner le tableau de variation de f .

2°) g est la fonction définie sur] 0 ;+∞ [par $f(x) = \frac{1}{x}$

a) Exprimer en fonction de x, h (x) = g[f (x)].

b) Pour quelles valeurs de x la fonction h est-elle définie ?

c)Déterminer le tableau de variation de la fonction h.

II Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f (x) $= 2 - x^2$.

1°) Etudier le signe de f .

2°) g est la fonction racine carrée définie pour x $\geq$ 0, exprimer en fonction de x, la fonction h=g$\circ$f, composée de la fonction f suivie de g.

3°) Sur quel(s) intervalle(s) la fonction h est-elle définie ?

III

Le coût de production exprimé en euros, pour q centaines d'articles est donné par :
$C(q) = 0,75q^3 - 10,5q^2 - 60q$ avec q $\in$(]0 ; 10].

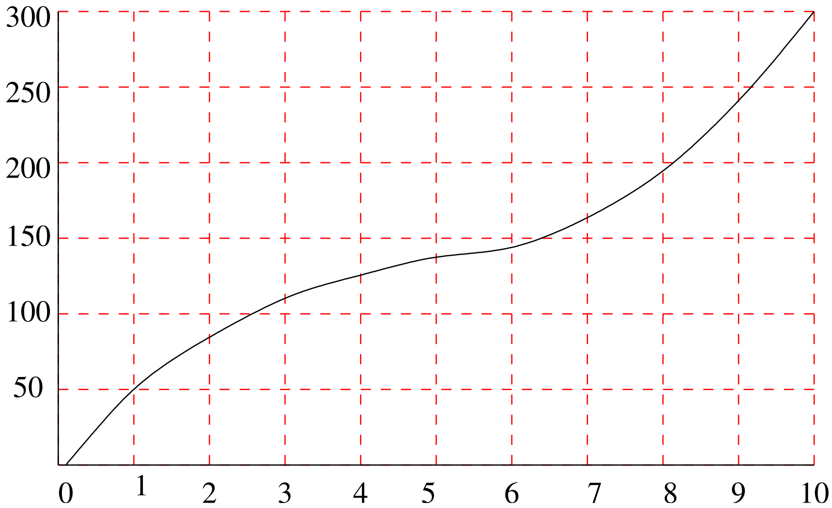
Exprimer en fonction de q le coût moyen C$_m$(q) par centaines de pièces.

Quel est le coût moyen par centaines de pièces si la production est de 500 articles ? 1000 articles ?

M étant un point d'abscisse q de la courbe C représentative du coût et O l' origine du repère, quel est le lien entre le coût moyen C$_m$(q) et la droite (OM) ?

En utilisant la droite (OM), trouver graphiquement sur la courbe de coût la production qui minimise le coût moyen par centaines de pièces.

Quel est alors le coût moyen minimal par centaines de pièces ?


300
250
200
150
100
50
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Devoir n°2

I Soit la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 7$.
1°) a) Déterminer les coordonnées du point I minimum de C_f.
b) Montrer que la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie de la courbe C_f.
c) Tracer la courbe C_f.
2°) a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 0$
.
3°) Soit la fonction $g(x) = |x^2 - 6x + 7|$.
a) Tracer la courbe de g en utilisant celle de f et une transformation.
b) Ecrire le tableau de variation de g.
4°) Soit la fonction $h(x) = x^2 + 6x + 7$.
a) Montrer que $h(x) = f(-x)$.
b) En déduire la représentation graphique de h.

II Soit les fonctions à variables réelles définies par
$f_1 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + 1$ et $f_2 : x \mapsto -3(2-x)^2 - 2$.
a) Donner les domaines de définition de f_1 et de f_2.
b) Décomposer f_1 et f_2 à l'aide de fonctions simples. En déduire leur tableau de variation.
c) Montrer que f_1 est minorée et que f_2 est majorée.
En déduire que l'on a pour tout x $f_1(x) \geq f_2(x)$.
d) Soit le point $\Omega'(2; -2)$. Montrer que la courbe de f_2 a pour équation $Y = -3X^2$ dans le repère$(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$.
Tracer sa courbe.
e) Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe f_1.

III
Deux automobilistes effectuent le même trajet de 400 km mais le second le fait à 20 km/h de plus que le premier et en une heure de moins.
Calculer la vitesse de chacun et le temps nécessaire pour parcourir le trajet.

IV
Résoudre l'inéquation :

$$\frac{-9x^2 + 5x + 4}{7x^2 - 4x - 3} < 0$$

*

1 Résoudre les équations suivantes :

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$16x^2 - 40x + 25 = 0$

$3x^2 + 2x + 1 = 0$

$-3x^2 + 4x - \frac{4}{3} = 0$

2 Factoriser les polynômes suivants :

$P(x) = x^2 + 5x - 14$

$P(x) = 3x^2 + 2x + 5$

$P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$

$P(x) = x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{49}{9}$

3 Résoudre les inéquations suivantes :

$2x^2 - 11x + 9 \leq 0$

$x^2 - x + 3 > 0$

$-x^2 + 6x - 9 \geq 0$

$(4x - 3)(-5x^2 + 2x + 7) \leq 0$

4 Utiliser un changement de variables pour résoudre les équations suivantes :

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$

5 Une école a loué un autocar pour une excursion scolaire pour un forfait de 2300 F.

Au départ, il y a défection de 6 élèves et chacun des partants doit payer 7,5 F de plus.

Quel est le nombre d'élèves qui participent à l'excursion ?

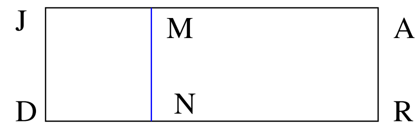
6 Un particulier place un capital de 30 000 euros.

Après un an, il retire le capital et les intérêts produits et place le tout à un taux d'intérêt supérieur de 3% au premier.

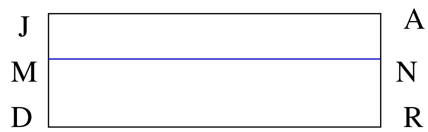
Un an après, il retire 3210 euros d'intérêts.

Déterminer le premier taux.

7 Un jardin JARD rectangulaire de 1200 m^2 est clôturé et partagé en deux par un segment [MN] parallèle à deux côtés (deux possibilités sont à considérer).



ou



Il faut 180 m de grillage pour entourer le jardin et faire la séparation [MN].

Déterminer, dans chaque cas, les dimensions de ce jardin

8 En augmentant de 3 cm le rayon d'un disque, son aire a augmenté de 69%.

Quel était le rayon du disque initial ?

9 Un homme achète un cheval qu'il revend au bout de quelques temps pour 24 Louis.

A cette vente, il perd autant pour cent que le cheval lui avait coûté.

Quel était le prix d'achat ?

10 Deux automobilistes effectuent le même trajet de 400 km mais le second le fait à 20 km/h de plus que le premier et en une heure de moins.

Calculer la vitesse de chacun et le temps nécessaire pour parcourir le trajet.

11 Un bâteau descend une rivière sur un parcours de 29 km puis la remonte sur 28,5 km.

Le voyage dure 5 heures.

La vitesse du courant est de 2,5 km/h.

Quelle est la vitesse propre de ce bâteau ?

12 La grande base d'un trapèze mesure 3 fois plus que la petite base.

La hauteur de ce trapèze mesure 2 fois plus que la petite base.

L'aire de ce trapèze est 36 cm^2.

Calculer la longueur des bases et de la hauteur de ce trapèze.

13 Par chemin de fer, la distance de Paris à Bordeaux est de 588 km.

Un train parcourt ce trajet à une vitesse moyenne inconnue.

Si l'on augmente de 14 km/h cette vitesse moyenne, on diminue de 1 heure le temps du trajet.

Calculer la vitesse moyenne du train.

14 En augmentant de 5 mm les côtés d'un carré, son aire a augmenté de 21%.

Combien mesurait le côté initial ?

15 Déterminer deux nombres qui diffèrent de 1 et dont la somme est égale au produit.

16 Un jardin rectangulaire de 112 m^2 est entouré par une clôture de 44 m de long.

Déterminer sa longueur et sa largeur.

17 Soit $f(x) = x^2 - 5x + 1$.

a) Calculer les images par f de 0 ; 1 ; -2 ; $\frac{5}{2}$ et $-\frac{3}{2}$

b) Déterminer les antécédants de 0 ; -4 ; 1 et $-\frac{21}{4}$

18 a) Construire les représentations graphiques C et D des fonctions :

$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 3 - 2x$

b) C et D se coupent en deux points E et F. Calculer leurs coordonnées.

19 Résoudre l'inéquation :

$$\frac{-9x^2 + 5x + 4}{7x^2 - 4x - 3} < 0$$

20 Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{x^2 - 9} + \frac{2}{x - 3} + \frac{3}{x + 3} = 1$$

21 Résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

22 Déterminer toutesles équations du second degré qui ont les nombres 1 et 2 pour racines.

23 Déterminer deux nombres connaîssant leur somme S et leur produit P pour

a) S=4 et P=1 b) S=3 et P=-10

c) S=$\frac{u^2+1}{u}$ où u$\neq$ 0.

24 Montrer que 1 est racine de l'équation $x^2 - 6x + 5$. Déterminer l'autre racine en utilisant l'expression de la somme et du produit.

25 Déterminer m pour que l'équation $x^2 + 2mx - m + 4 = 0$ admette -3 comme racine. Trouver l'autre racine.

26 Déterminer, si possible la valeur de m pour que l'équation en x : $x^2 + (2m - 1)x + m - 5 = 0$ admette deux racines négatives.

27 Résoudre en discutant suivant les valeurs du paramètre m :

$(m - 3)x^2 + (m + 1)x - (m + 7) = 0$

$mx^2 + (2m - 1)x + m - 3 \leq 0$

1 Soit la fonction $f(x) = 5x - 2$.

a) Calculer le taux de variation de f entre 2 et 3.

b) Calculer le taux de variation de f entre 1 et 1+h.

c) En déduire f'(1).

2 Soit la fonction $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

a) Calculer le taux de variation de f entre 2 et 2+h.

b) En déduire f'(2).

3 Soit la fonction $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

a) Calculer le taux de variation de f entre 0 et 0+h.

b) En déduire f'(0).

4 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x - 5$

$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

$f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 5x - 8$

$f(x) = \dfrac{3}{5}x^3 - \dfrac{2}{7}x^2 - 6x + \dfrac{1}{3}$

f(x)= $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^3}$

$f(x) = (x-2)\sqrt{x}$

$f(x) = (x^3 - 5x^2 + 1)(2x^4 - 6x + 8)$

$f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

$f(x) = -\dfrac{5}{2x^2 - 3x + 7}$

$f(x) = \dfrac{3x-5}{2x+4}$

$f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{4x^2 - 1}$

$f(x) == \dfrac{6x+2}{3x+2}$

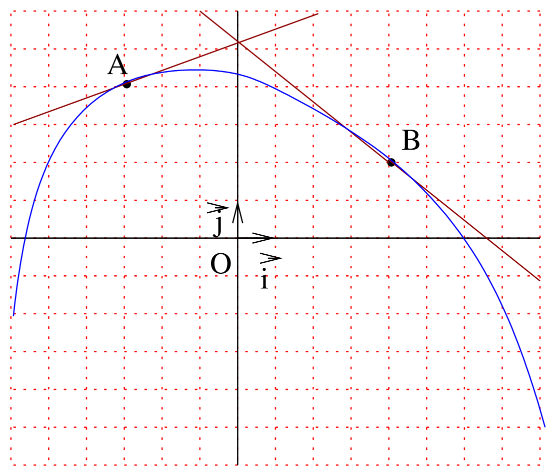
$f(x) = (2x-3)^2$

5 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.

a) Déterminer le coefficient directeur des tangentes à cette courbe aux points A et B.

b) En déduire f'(-3) et f'(4).

c) Ecrire l'équation de ces tangentes.



6 Soit la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe de f aux points d'abscisses 0 et 3.

b) Déterminer l'abscisse des points de la courbe de f qui admettent une tangente de coefficient directeur 2.

c) Déterminer les points de la courbe de f qui admettent une tangente parrallèle à la droite d'équation $y = -2x - 1$.

d) Déterminer les points de la courbe de f qui admettent une tangente horizontale.

Approximation affine

7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)=$\frac{x+1}{x+2}$
1°) Pour tout réel h différent de -2, déterminer $f(h)-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}h$
2°) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer f'(0).
3°) En déduire une approximation affine de f en 0.
4°) En déduire une approximation de f(0,0001). Préciser si elle est par défaut ou par excès et donner le plus petit majorant du type 10^{-p} avec p entier naturel, de l'erreur commise.

8 Déterminer, si elle existe la meilleure approximation affine en x_0 de
a) $f(x)=-2x^3-5x^2+x+3$ avec x_0=0
b) $f(x)=\frac{-x+3}{2x-1}$ avecx_0=0
c) $f(x)=\sqrt{5+4x}$ avec x_0=0.
d) f(x)=sin x avec x_0=0.

Fonctions rationnelles

9 Soit la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par f(x)=$\frac{x^2-2x+1}{x^2-4}$.
a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
b) Calculer f'(x) et étudier son signe.
c) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
d) Tracer la courbe de f.
e) Montrer que l'équation (1) $3x^3-2x^2+22x+33=0$ a les mêmes solutions que l'équation f(x)=$-\frac{3}{5}$x+$\frac{7}{5}$.
f) Tracer la droite d'équation y=$-\frac{3}{5}$x+$\frac{7}{5}$ et déterminer graphiquement une solution entière x_0 de l'équation.
g) Déterminer a, b etc tels que

$$3x^3-2x^2-22x+33=(x-x_0)(ax^2+bx+c)$$

h) Déterminer par le calcul les autres solutions de l'équation (1).

10 On donne la fonction f définie sur $D=\mathbb{R}\diagup\{2\}$ par

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-2}$$

1°) Montrer que pour tout x $\in D$, f(x)=$x+3+\frac{4}{x-2}$.
2°) Etudier les variations de f.
3°) Dresser le tableau de variation de f.
4°) Tracer les droites Δ et Δ' d'équations $y=x+3$ et $x=2$.Tracer la représentation graphique C de f.
5°) Soit M le point de C d'abscisse x et P le point de Δ de même d'abcsisse.
a) Exprimer $\overline{PM}$ en fonction de x.
b) Calculer la limite de $\overline{PM}$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
c) Etudier le signe de $\overline{PM}$ sur chacun des intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$.
d) En déduire la position de C par rapport à Δ.

Autres fonctions

11 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$$

1°) Etudier la dérivabilité de f, en particulier en 0. En déduire la tangente T_1 à la courbe de f au point d'abscisse 0.
2°) Etablir le tableau de variation de f.
3°) Déterminer une équation de la tangente T_2 à la courbe de f au point d'ordonnée 0.
4°) Tracer les tangentes T_1 et T_2 et la courbe de f.

12 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=cos^2x-cos\ x$$

a) Vérifier que f est paire et périodique de période 2π.
b) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

13 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=sin\ x+cos^2x$$

a) Vérifier que f est périodique, de période 2π.
b) Etudier les variations de f.
c) Quels sont les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses ?
d) Tracer la courbe de f.

Devoirs

Devoir n°1

I Soit $f(x) = -x^2 + x + 3$.
a) En utilisant le taux de variation, calculer f'(1).

b) En calculant f'(x), retrouver la valeur de f'(x).

c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

d) Etudier le signe de f'(x).

II Soit $f(x) = \dfrac{x-2}{2x+1}$

a) En utilisant le taux de variation, calculer f'(1).

b) En calculant f'(x), retrouver la valeur de f'(x).

c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

d) Etudier le signe de f'(x).

III Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 2x^3 - 5x + 4$

$f(x) = 2x - 3 + \sqrt{x} - \dfrac{3}{x^2}$

$f(x) = (3x^2 - 5x + 4)^2$

$f(x) = \dfrac{5}{3 - 2x^2}$

$f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{1 - 5x}$

IV Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - 4$.

a) Calculer f'(x).

b) Etudier le signe de f'(x).

c) Etablir le tableau de variation de f.

Devoir n°2

I La courbe ci-dessus est la représentation graphique d'une fonction f :

La droite Δ est la tangente à la courbe au point A d'abscisse 2.

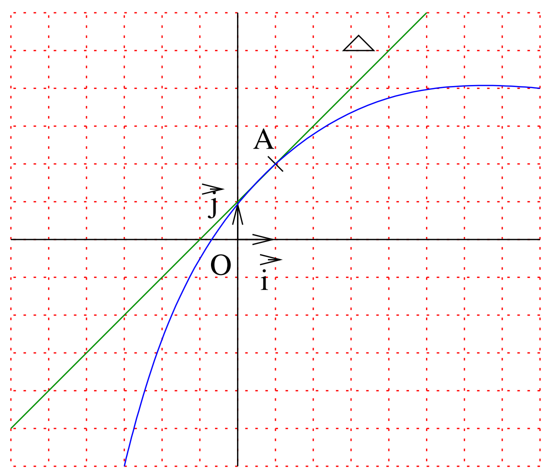
a) Lire sur le graphique f(2) et f'(2).

b) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

c) résoudre graphiquement :

$f(x) = -2$

$f(x) \leq -2$



II Soit la fonction $f(x) = \dfrac{2x-5}{3+x}$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Calculer f'x).

c) Etudier le signe de f('x).

d) Etablir le tableau de variation de f.

e) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

f) Déterminer les points de la courbe qui admettent une tangente de coefficient directeur 1.

1 Soit la fonction f(x)=$\dfrac{x}{x^2-1}$.

Compléter le tableau suivant :

x	1,1	1,01	1,001	1,00001	0,9	0,99	0,9999	$1-10^{-10}$	$1+10^{-10}$	$1+10^{-100}$
f(x)										

2 Déterminer les limites suivantes et donner l'équation de l'asymptôte à la courbe que l'on peut déduire de cette limite.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6-4x+1}{1-x^4} \qquad \lim_{x\to5}(2x^3+5x^2-x+1) \qquad \lim_{x\to1}\frac{x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to0}(x+\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{1-x} \qquad \lim_{x\to3^+}\frac{2x^2+x-1}{x-3} \qquad \lim_{x\to-1}\frac{x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3-4x^2}{3+2x^2} \qquad \lim_{x\to3^-}\frac{2x^2+x-1}{x-3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-1}{(x-1)^2} \qquad \lim_{x\to1}\frac{x}{\sqrt{x-1}} \qquad \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

3 Soit la fonction f(x)=$2x-3+\dfrac{x+1}{x+2}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2°) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

3°) En déduire l'équation de l'asymptôte verticale.

4°) Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x)-(2x-3)$.

5°) En déduire une équation de l'asympôte oblique.

4 Soit la fonction f(x)=$\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2°) Calculer a,b,c tels que f(x)=$ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

3°) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

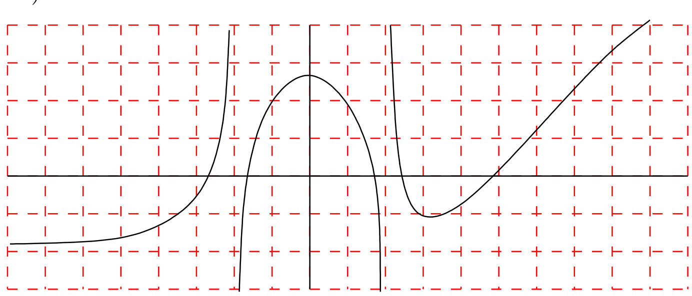
4°) Soit y=x-1. Calculer la limite de $f(x)-y$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

5°) Conclure sur les asymptôtes.

5 La courbe de la fonction f ci-dessous a des asympôtes.

1°) Tracer et donner l'équation de ces asymptôtes.

2°) En déduire les limites aux bornes de l'ensemble de définition.



1 Calculer les 5 premiers termes des suites suivantes :

1°) $u_n = 2n^2 - 3n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2°) $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3°) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

4°) $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2 Etudier le sens de variation des suites suivantes :

1°) $u_n = 2n^2 - 3n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2°) $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3°) $u_n = 2^n \times 3^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

4°) $u_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

5°) $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = n + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3 Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$

1°) Calculer u_n pour $0 \leq n \leq 5$.

2°) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

3°) Montrer que (u_n) est majorée par 2.

4 (u_n) est la suite définie par $u_n = n^2 - 2n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Montrer que u_n est minorée par -5.

5 Soit la suite définie par u_0=1 et $u_n = \dfrac{2}{3}u_{n-1} + 2$

a) Calculer les cinq premiers termes de cette suite.

b) Tracer les droites d'équation $y = \dfrac{2}{3}x + 2$ et y=x.

c) Représenter graphiquement les termes de la suites (u_n).

d) Quel semble être le sens de variation de cette suite ? et sa limite ?

Suites arithmétiques et géométriques

6 a) Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Calculer u_1, u_2 et u_{10}. puis $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$.

b)Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Calculer v_1, v_2 et v_{10}. puis $v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{10}$.

7 a) Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_4 = 35$ et $u_2 = 15$.

Calculer la raison r et le premier terme u_0.

b) Soit (v_n) une suite géométrique telle que v_2=5 et $v_4 = 7,2$.
Calculer v_4 et $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.

8 Calculer les sommes suivantes :

a) S=1+3+5+7+...+99.
S'=2+4+6+8+...+100.

En déduire la somme :
S"=1-2+3-5+...+99-100.

b) $T = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{10}$.

9 Un capital de 12000 euros est placé à intérêts composés aux taux de 4%.

Quelle est sa valeur acquise au bout de 10 ans ?

Au bout de combien de temps, ce capital aura-t-il doublé ?

10 Quel capital faut-il placer à 8% avec capitalisation annuelle pour que la valeur acquise au bout de 10 ans soit 100000 euros ?

11 On considère la suite réelle (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 4$ et par la relation :

$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ pour tout $n \geq 1$.
1°) Calculer u_1, u_2, u_3.

2°) On pose $v_n = u_n - 3$ pour tout $n \geq 0$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Calculer v_0 et montrer que $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.

c) En déduire v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

12 Une personne loue une maison à partir du 1^{er} janvier 2000.

Elle a le choix entre deux formules de contrat.

Le loyer initial est de 1000 euros et le locataire s'engage à occuper la maison six années complètes.
Contrat 1 : Augmentation annuelle de 10%

On note u_0 le loyer annuel pour 2000, u_n le loyer annuel pour l'année (2000+n).

a) Calculer u_{n+1} en fonction de u_n.

b) En déduire u_n en fonction de n.

c) Calculer u_5 (arrondi au centième).

d) Calculer la somme payée à l'issue des six années.

Contrat 2 : Augmentation annuelle de 110 euros.

On note v_0 le loyer annuel pour 2000, v_n le loyer annuel pour l'année (2000+n).

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.

b) En déduire v_n en fonctionde n.

c) Calculer v_5 (arrondi au centième).

d) Calculer la somme payée à l'issue des six années.

Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ?

13 Harpagon place un capital de 10 000 euros au taux annuel de 10% en intérêts simples.

Onc'Picsou place aussi 10 000 euros à 10% mais avec intérêts composés et capitalisation annuelle.

Soient h_n et p_n les avoirs respectifs d'Arpagon et d'Onc'Picsou après n années d'épargne.

a) Calculer h_1, h_2, h_3 et p_1, p_2, p_3.

b) Montrer que la suite (h_n) est arithmétique. En déduire h_n en fonction de n. Calculer h_{10}.

c) Montrer que la suite (p_n) est géométrique. En déduire p_n en fonction de n. Calculer h_{10}.

d) Comparer les deux systèmes d'épargne.

14 Une compagnie minière effectue un forage.

Les crédits débloqués sont de 46 800 euros. L'étude du devis montre que le coût du premier mètre de forage est de 100 euros, que celui du second mètre est de 140 euros, celui du troisième mètre 180 euros etc...

Jusqu'à quelle profondeur peut-on creuser en utilisant les crédits alloués ?

15 On laisse tomber une balle d'une hauteur de 2 mètres sur un sol horizontal sur lequel, elle rebondit aux deux tiers de la hauteur précédante.

Soit h_n la hauteur du n^{ieme} rebond.

A partir de quelle valeur de n aura-t-on $h_n < 2$ mm ?

On admet qu'à ce moment-là, elle s'immobilise.

Quelle distance aura-t-elle parcourue depuis qu'elle a été lâchée ?

Devoir n°1

I 1) Étudier la monotonie des suites suivantes (en calculant $u_{n+1} - u_n$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a) $u_n = n - n^2$

b) $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ $(n \geq 2)$

c) $u_n = 4 \times \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$

d) $u_n = -5\dfrac{2^{n-1}}{5^n}$

II Les suites suivantes sont arithmétiques :

Calculer la raison et le premier terme u_0 puis calculer u_{30} pour les suites suivantes :

a) $u_5 = 3$ et $u_{15} = -27$

b) $u_{20} = -52$ et $u_{51} = -145$

III Les suites suivantes sont géométriques

Calculer la raison et le premier terme de ces suites (il peut y avoir plusieurs réponses possibles pour chacun des a) et b)

Pour chacun de ces cas, calculer u_{30} :

a) $u_3 = -48$ et $u_9 = -3072$

b) $u_{10} = 8$ et $u_7 = -1$

IV
Calculer les sommes suivantes (à vous de voir s'il s'agit de suites arithmétiques ou géométriques).

a) $S_1 = 18 + 54 + 162 + ... + 39366$

b) $S_2 = -5 + 2 + 9 + ... + 65$

Devoir n°2

I A l'aide des données fournies pour chacune des suites suivantes, répondez à la questions posée :

a) $u_n = -5$ si n est impair et $u_n = 5$ si n est pair ; la suite est-elle géométrique ?

b) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = n \times u_n$; la suite est-elle géométrique ?

II a) $u_5 = 729$; $q = -3$, calculez u_{10} et u_0

b) $u_0 = 1$; $u_7 = 128$, calculez q.

c) $u_4 = 44$; $u_{10} = 352$, calculez u_{13} (la raison est positive).

d) $w_0 = 2$ et $w_2 = 18$, calculez w_{10}.

III Calculer les sommes suivantes :

1° $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots\ldots\ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{1998}$ 2°) $S = (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \ldots\ldots + (-x)^{17}$

3°) $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots.. + \frac{1}{14348907}$

IV

Montrez que la suite $(\text{u})_n$, définie pour tout naturel n par $u_n = \frac{1}{n+2}$ est strictement décroissante.

Est-ce une suite géométrique ?

V

Etudiez les variations de la suite u définie pour tout naturel n par : $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$.

Est-ce une suite géométrique ?

VI On place un capital de 100 000 francs à 7 % par an (intérêts composés).

1°) De combien dispose-t-on au bout de quatre ans ? au bout de dix ans ?

2°) Combien d'années sont nécessaires pour voir le capital doubler ? pour le voir tripler ?

VII Deux propositions sont offertes pour placer une somme de 5 000 €.

Le premier placement est rémunéré à intérêts simples à un taux annuel de 5% du capital initial. On note u_n la somme totale obtenue au bout de n années.

Le second placement est rémunéré à intérêts composés à un taux annuel de 4,5 %. On note alors v_n la somme totale obtenue au bout de n années.

1°) Que valent u_0 et v_0 ?

2°) a) Déterminer u_n en fonction de n.

b) Déterminer v_n en fonction de n.

3°) Quel placement choisir si l'on décide d'immobiliser son argent pendant 5 ans ? 6 ans ?

VIII Soit la suite u définie par $u_o = 1$; $un + 1 = \frac{2u_n}{3} + 1$ pour tout n entier.

1°) . Calculer les quatre premiers termes de la suite u.

Montrer que ce n'est pas une suite géométrique.

2°). La suite v est définie par : $v_n = u_n - 3$, pour tout n entier.

Montrer que la suite v est géométrique.

3°). Déterminer vn en fonction de n, puis un en fonction de n.

4°). Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots. + u_n$ en fonction de n.

Devoir n°3

Exercice 1. (5 points)

Le 1er janvier 2002, René a placé 5000 euros à intérêt composés au taux annuel de 3%. (Cela signifie que les intérêts ajoutés au capital chaque nouvelle année sont égaux à 3% du capital de l'année précédente). On note C_n le capital de René disponible au 1er janvier de l'année 2002+n.

1. Calculer les valeurs exactes de C_1 et C_2.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et montrer que C_n peut s'écrire : $C_n = 1,03^n \times 5000$.
3. Préciser le sens de variation de la suite (C_n).
4. Au 1er janvier 2010, René aura besoin d'une somme de 7000 euros. Son capital sera-t-il alors suffisant pour subvenir à cette dépense ?
5. Quel nombre minimal d'années devra-t-il attendre pour retirer un capital de 7000 euros ?

Exercice 2. (10 points)

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{4}{x})$.

1. (a) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (On ne demande pas les limites).
   (b) En déduire que si $2 \leq x \leq 4$, alors $2 \leq f(x) \leq 4$.
2. On définit la suite (u_n) explicitement par $u_n = f(n)$, pour tout entier n tel que $n > 0$.
   (a) Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
   (b) A l'aide de la question 1, étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. On définit la suite récurrente (v_n) par : $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{4}{v_n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$.
   (a) Vérifier que $2 \leq v_1 \leq 4$.
   (b) A l'aide de la question 1, montrer que si $2 \leq v_n \leq 4$ alors $2 \leq v_{n+1} \leq 4$.
   (c) On admet que le terme général v_n vérifie $2 \leq v_n \leq 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Exprimer la différence $v_{n+1} - v_n$ en fonction de v_n.
   Etudier le signe de la différence $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n.
   En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
   (d) Quelle conjecture peut-on former sur la convergence de la suite (v_n) ?

Exercice 3. (5 points)

La suite (d_n) est définie par $\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = \sqrt{1 + (d_n)^2} \end{cases}$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite.
2. Vérifier que tous les termes d_n sont positifs.
3. Vérifier que la suite (d_n) n'est ni géométrique ni arithmétique.
4. On pose $u_n = (d_n)^2$. Montrer que la suite (u_n) est arithmétique.
5. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.
6. Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $\sqrt{n} \leq d_n \leq n$. En déduire la limite de la suite (d_n).

1 On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Quelle est la probabilité pour que cette carte soit :

a) un as

b) une carte rouge.

c) un as ou une carte rouge.

d) ni un as ni une carte rouge.

2 On jette un dé parfait. Quelle est la probabilité que le nombre obtenu soit :

a) égal à 6 ?

b) distinct de 1 et de 6 ?

c) un nombre pair ?

d) un multiple de 3 ?

3 On jette simultanément un dé bleu et un dé rouge.

a) Quelle est la probabilité pour que le nombre marqué sur le dé bleu soit le double de celui marqué sur le dé rouge ?

b) Quelle est la probabilité pour que la somme des deux nombres marqués soit égale à 5 ?

4 On jette sucessivement deux pièces de monnaie non truquées. Quelle est la probabilité d'avoir :

a) 2 piles ?

b) 2 faces ?

c) 1 pile et 1 face ?

5 p est une probabilité sur $\Omega=\{a\,;b\,;c\}$.

a) Calculer $p(\{c\})$ sachant que $p(\{a\})=\dfrac{1}{8}$ et $p(\{b\})=\dfrac{1}{3}$.

b) Calculer alors $p(\{a,b\})$ et $p(\{a\,;c\})$

6 p est une probabilité sur $\Omega=\{a\,;b\,;c\,;d\}$.
Calculer $p(\{a\})$ et $p(\{b\})$ sachant que $p(\{a\})=3p(\{b\})$ et $p(\{c\})=p(\{d\})=\dfrac{1}{3}$.

7 p est une probabilité sur Ω. A et B sont deux événements de Ω.

On sait que $p(A)=0{,}5$; $p(B)=0{,}7$; $p(A\cap B)=0{,}4$.

Calculer $p(\bar{B})$; $p(\bar{A})$ et $p(a\cup B)$.

8 Cinq joueurs A, B, C, D et E organisent un tournoi d'échecs.
On estime que :

- A, B et C ont la même probabilité de gagner.
- D et E ont aussi la même probabilité de gagner.
- A a trois fois plus de chances de gagner que D.

a) Quelle est la probabilité de gagner pour chacun des 5 joueurs ?

b) Quelle est la probabilité que D ou E gagne ?

c) Quelle est la probabilité que A, B ou C gagne ?

9 Sur 100 élèves interrogés au sujet de l'utilisation de deux livres A et B :

- 50 utilisent A.
- 35 utilisent B.
- 10 utilisent A et B.

On prend au hasard un élève, quelle est la probabilité que :

a) il utilise au moins l'un des deux livres ?

b) il n'utilise aucun des deux livres.

c) Il utilise A et n'utilise pas B.

10 Il n'y a que trois douaniers pour surveiller 5 postes frontières A, B, C, D et E.

Chaque jours les trois postes surveillés sont choisis au hasard.

Quelle est la probabilité pour qu'un jour donné, les postes A et B soient libres ?

11 On prépare trois colis différents et trois étiquettes portant les noms des trois destinataires.
On colle au hasard une étiquette sur chaque coli.

Quelle est la probabilité que :

a) les 3 colis arrivent à leur destinataire ?

b) l'un au moins des colis arrive à son destinataire ?

c) aucun coli n'arrive à son destinataire ?

12 On lance trois dés parfait.
Quelle est la probabilité pour que :

a) la somme des points marqués soit égale à 6 ?

b) la somme des points marqués soit inférieure ou égale à 16 ?

c) les trois points marqués soient pairs ?

d) la somme des points marqués soit supérieure ou égale à 20 ?

1 On a mesuré les tailles d'un groupe de 32 enfants.

Taille en cm x_i	nb d'enfants y_i	effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants	Fréquences	x_iy_i
[120 ;124[	1				
[124 ;128[	7				
[128 ;132[	12				
[132 ;136[	9				
[136 ;140[	3				
Total					

1°) Indiquer ce que sont le caractère et l'effectif de cette série statistique. Le caractère est-il qualitatif ou quantitatif ? Est-il discret ou continue ? Quelle est l'étendue ?

2°) Calculer les effectifs cumulés croissants.

3°) Calculer les effectifs cumulés décroissants.

4°) Calculer les fréquences en pourcentage.

5°) A quelle classe appartient le mode ?

6°) A quelle classe appartient la médiane ?

7°) Calculer la moyenne.

8°) Tracer l'histogramme.

9°) Tracer les courbes des effectifs croissants et des effectifs décroissants. Lire la valeur de la médiane.

2 Dans un groupe de personne, 8 possèdent une voiture de marque Renault, 7 ont une voiture de marque Citroën et 5 possèdent une voiture de marque Peugeot.

Tracer le diagramme circulaire de cette série statistique.

3 Tracer l'histogramme de la série statistique suivante :

[0 ;4]	[4 ;6]	[6 ;7]	[7 ;8]	[8 ;10]	[10 ;14]	[14 ;20]
2	10	9	8	20	6	3

4 Dans le lycée Molière, le proviseur affiche les résultats obtenus au Bac.

série	nombre de candidats	taux de réussite
L	132	75 %
ES	160	85 %
S	125	80 %

1. Calculer le nombre de reçus dans chaque série.

2. a) En voyant les résultats affichés, Sébastien affirme que le taux de réussite global est de 80 %, Thomas lui dit que non.

Qui a raison ? Justifier par un calcul de moyenne.

b) Retrouver le taux de réussite au Bac dans ce lycée à l'aide du nombre total de reçus.

5 Le coucou est un oiseau qui fait couver ses oeufs par des oiseaux d'autres espèces de tailles très différentes. Une étude a été faite sur des oeufs déposés dans des nids de petite taille (nids de roitelets) ou de grande taille (nids de fauvettes). Le tableau suivant donne en mm le diamètre des oeufs.

nids de roitelets	19,8	22,1	21,5	20,9	22	22,3	21	20,3	20,9	22	20,8	21,2	21
nids de fauvettes	22	23,9	20,9	23,8	25	24	23,8	21,7	22,8	23,1	23,5	23	23,1

1. Donner pour chacune des deux séries la moyenne, la médiane et l'étendue.

2. Regrouper les valeurs des deux séries en classes. Prendre [19 ; 20[, [20 ; 21[, [21 ; 22[, [22 ; 23[pour la première série ; [20 ; 21[, [21 ; 22[, [22 ; 23[, [23 ; 24[, [24 ; 25] pour la deuxième.

3. Représenter sur un même graphique les histogrammes donnant la distribution des fréquences en utilisant deux couleurs différentes.

4. Au vu de ces résultats, quelle hypothèse peut formuler le biologiste concernant l'existence d'un lien entre la taille des nids et celle des oeufs déposés ?

6 La capacité vitale est le volume d'air maximal pouvant être mobilisé en une seule inspiration.

Sur un échantillon de 17 personnes, on a mesuré la capacité vitale (en litres). Voici la liste des résultats :

4,15 - 4,48 - 5,24 - 4,8 - 4,95 - 4,05 - 4,3 - 4,7 - 5,51 - 4,58 - 4,12 - 5,7 - 4,85 - 5,05 - 4,65 - 4,7 - 4,28.

1. Déterminer l'étendue et la moyenne de cette série. Arrondir la moyenne au centilitre près.(Pour la moyenne, on utilisera la calculatrice sans explication.)

2. En expliquant la méthode utilisée, déterminer la médiane de cette série.

3. On décide de regrouper les valeurs de la série par classes.

Compléter le tableau suivant :

capacité vitale (en litres)	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[	[5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[
effectifs				
effectifs cumulés croissants				

4. a) A l'aide de cette répartition par classes, déterminer la moyenne des valeurs.

b) On admet que dans chaque classe, la répartition est uniforme.

Tracer alors la courbe des effectifs cumulés.

En déduire graphiquement le médiane de ces valeurs.

Calcul de moyennes

7 1. Après six contrôles, un élève obtient 12 de moyenne, puis 15 au septième contrôle.

Tous les contrôles ont le même coefficient. Quelle est la nouvelle moyenne ?

2. On doit déterminer la moyenne de 560 nombres. A la calculatrice, on trouve 115 comme moyenne. Mais on s'aperçoit que l'on a oublié d'entrer l'un des nombres, à savoir 171.

Expliquer comment on peut réparer cette étourderie sans recalculer la moyenne des 560 nombres.

Quelle est la moyenne des 561 nombres ?

8 Dans un lycée, il y a quatre classes de seconde contenant respectivement 30, 32, 28 et 27 élèves.

Les moyennes des notes d'Education physique de ces classes sont respectivement 12, 11, 13 et 14.

Quelle est la moyenne des notes d'Education physique pour l'ensemble des quatre classes de seconde du lycée.

9 La moyenne de cinq notes d'un élève est 12. Les quatre premières notes sont 13, 10, 8 et 15.

Quelle est la cinquième ?

10 On note m la moyenne de n nombres a_1, a_2, ...,a_n.

1°) On transforme chaque a_i de la manière suivante : on lui ajoute 1 et on multiplie le résultat obtenu par 2.

Quelle est la moyenne de cette nouvelle série de nombres ?
2°) On transforme chaque a_i de la manière suivante : on le multiplie par 2 et on ajoute 1 au résultat obtenu.

Quelle est la moyenne de cette nouvelle série de nombres ?

11 Dans une classe, il y a 20 filles et 15 garçons.

La moyenne des tailles des élèves est de 1,7 m.

La moyenne des tailles des garçons est de 1,8 m.

Quelle est la taille moyenne des filles de cette classe ?

12 Justine a 9,8 de moyenne sur les quatre contrôles du trimestre.

Mais le professeur, après s'être aperçu de son erreur dans la correction du dernier contrôle, l'a noté sur 15 et non 11.

Quelle est la moyenne corrigée de Justine ?

13 Après quatre contrôles de mathématiques, Virginie a 12 de moyenne et Elodie a 10,5.

a) Virginie obtient 10 au 5^{ieme} contrôle et Elodie 15.
Calculer leurs moyennes après cinq contrôles.

b) Au 6^{ieme}contrôle, Virginie a eu 13.
Déterminer la note x d'Elodie au 6^{ieme} contrôle sachant qu'elle a atteint la même moyenne que Virginie après six contrôles.

14 Dans un centre d'examen, la moyenne des notes selon les jurys est la suivante :

- Jury 1 (120 candidats) : 11,2
- Jury 2 (130 candidats) : 10,1
- Jury 3 (85 candidats) : 9,6

Calculer la moyenne des notes de ces 335 candidats.

15 Dans une classe, il y a 20 filles et 10 garçons.

L'âge moyen des filles est de 16 ans 5 mois, celui des garçons 16 ans 11 mois.

Quelle est la moyenne d'âge des élèves de la classe.

Devoir n°1

I On donne la série statistique suivante :

x_i	-5	0	5	10	12
$n-i$	4	7	6	3	5

1°) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ, en écrivant le calcul de la variance V(x).

Rappel :

$$v(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=5} n_i(x - x_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=5}(n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma = \sqrt{V(x)}.$$

2°) Soit x un réel, on pose :

$$S(x) = \sum_{i=0}^{i=5} n_i(x - x_i)^2$$

Vérifier que S(x) $=25x^2 - 200x + 1270$

3°) Déterminer le sens de variations de la fonction S et en déduire sa valeur minimale.

4°) Retrouver le calcul de la variance à partir de la somme S.

II Le tableau suivant récapitule les moyennes trimestrielles obtenues par trois classes de 30 élèves :

Classe 1	notes	2,5	4,5	5	6	6,5	7,5	8,5	9	10	10,5	12	12,5	13	13,5	14	15,5
	effectifs	1	2	2	2	4	2	1	1	1	2	1	5	2	1	1	2
Classe 2	notes	2	2,5	3	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8	8,5	10,5	11,5	12,5	13	14,5	15,5
	effectifs	1	2	1	3	1	1	5	1	1	2	2	2	2	2	2	2
Classe 3	notes	1,5	2,5	3	3,5	4,5	5,5	6	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	12	12,5	13	14,5
	effectifs	1	2	1	4	1	1	1	3	1	2	2	1	1	4	1	4

Pour chacune des trois classes :

1°) Déterminer la note médiane, le premier et le troisième quartiles.

2°) Représenter la répartition des notes des trois classes à l'aide d'un diagramme en boîte.

3°) Calculer l'étendue, la moyenne $\bar{x}$et l'écart type σ, à 10^{-2} près.

4°) Calculer à 1 % près le pourcentage d'élèves dont la note est comprise dans l'intervalle interquartile ainsi que dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma]$

5°) On décide de rééquilibrer les moyennes des trois classes de la façon suivante :

On multiplie toutes les notes de la deuxième classe par 1,12 On ajoute 1,2 à toutes les notes de la troisième classe.

a) Pour chacune de ces deux classes recalculer :la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ, à 10^{-2} près.

b) Calculer à 1 % près le pourcentage d'élèves dont la note est comprise dans l'intervalle interquartile ainsi que dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma]$

1 Construire le point G, si il existe, barycentre de (A ; a) et (B ; b) dans les cas suivants :

a = 3 et b = 5 a = 5 et b = −4 a = −1 et b = −3

a =$\frac{2}{3}$ et b =$\frac{3}{2}$ a = −2 et b = 2 a = 4 et b = 6

2

Construire le point G, si il existe, barycentre de (A ; a), (B ; b) et (C ; c) dans les cas suivants :

a = 3 ; b = 5 et c = 4 a =−2 ; b = 5 et c = 3

a =−1 ; b =−2 et c = −4 a =$\frac{1}{2}$; b = −2 et c = 2

3 On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de (A ; 1), (B ; 4) et (C ; -3).

a) Construire le barycentre I de (B ; 4) et (C ; −3).

b) Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{0}$ et en déduire la position de G sur (AI).

4 Soit G le barycentre de (A ; 1), (B ; −1), (C ; 2) et (D ; 3).

a) Quelle relation vectorielle peut-on écrire ?

b) Soit J le barycentre de (A ; 1) et (C ; 2) et K le barycentre de (B ; −1) et (D ; 3).

Montrer que $3\overrightarrow{GJ} + 2\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{0}$. Construire les points J, K et G.

c) Construire le barycentre L de (A ; 1), (B ; −1) et (C ;2).

Montrer que $2\overrightarrow{GL} + 3\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$

En déduire une nouvelle construction de G.

5 On se donne un triangle ABC. Pour tout point M du plan on pose : $f(M) = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a) P désignant un point quelconque du plan, prouver que f(M) = f(P) = constante.

b) Construire G_1 le barycentre de (B ; −3) et (C ; 1). Montrer que $f(M) = 2\overrightarrow{G_1A}$.

c) Construire G_2 le barycentre de (A ; 2) et (C ; 1). Montrer que $f(M) = 3\overrightarrow{BG_2}$

d) On désigne par G_3 le barycentre de (B ;−3) et (A ; 2). Montrer que les droites (AG_1), (BG_2) et (CG_3) sont parallèles. En déduire une construction de G_1, G_2 et G_3.

6 ABC est un triangle rectangle isocèle de sommet A. ?a longueur AB est égale à a. Pour chaque question déterminer et tracer le lieu des points vérifiant la relation donnée :

a) $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.

b)$||2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}|| = 2$a

c) $||2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}|| =||2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}||$

d) $2AM^2 + BM^2 + CM^2 = a^2$

e) $||2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}||= ||\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}||$

7 ABCD est un carré de côté a. Pour chaque question déterminer le lieu des points vérifiant la relation donnée :

a) $||\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}|| = \overrightarrow{AB}$

b) $||\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}|| =||3\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{DM}||$

c) $||\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}|| = ||\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{DM}||$

d) $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4a^2$

e) $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = a^2$

8

Test d'évaluation

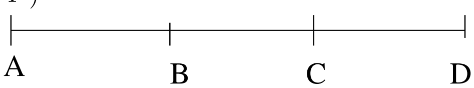
A–Pour chacune des propositions suivantes, cocher la bonne réponse.

1°) m désigne un réel. Le barycentre de (A ;3m) et (B ;5m-2), (C ;−1) n'existe que si
i. $m \neq 1$
ii. $m \neq 0$
iii. $m \neq \frac{1}{4}$

2°) Le barycentre de (A ;2) et (B ;3) est le point G tel que
i. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
ii. $2\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GB}$
iii. $5\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$.

3°) G est le barycentre de (A,1)et (B,3) alors est le barycentre de
i. (B,4) et (G,−4).
ii. (B,3) et (G,4).
iii. (B,3) et (G,4).

4°)



Sur cette figure, B est le barycentre de
i. (A,1) et (C,3).
ii. (A,−1) et (D,1).
iii. (A,2) et (C,1).

5°)$\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ alors est le barycentre de
i. (A,1), (B, $\frac{-3}{5}$), (C, $\frac{2}{5}$).
ii. (A,6), (B,−3), (C,2).
iii. (A,5), (B,−3), (C,2).

6°) Le barycentre de (A,−2), (B,3), (C,−1) est aussi barycentre de
i. (A,1), (B,$\frac{3}{2}$), (C,$\frac{1}{2}$).
ii. (A,4), (B,−6), (C,1).
iii.(A,$\frac{1}{3}$), B($-\frac{1}{2}$), (C,$\frac{1}{6}$)

9 ABCD est un tétraèdre. E et F sont les milieux respectifs de [AB] et de [CD]. I et J sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. H est le milieu de [IJ]. G est l'isobarycentre du tétraèdre.
a .Démontrer que H est le barycentre de (A,2), (B,2), (C,1), (D,1).
b. Montrer que E,H,F sont alignés ainsi que les points E,G,F.
c. Que peut-on dire des points E,H,G et F ?

Devoirs

10

Soit ABC un triangle équilatéral de côté de longueur a. Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$||\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}||$$

a) Prouver que le point B est un point de Γ.
b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant du choix du point M
c) Soit G le barycentre de (A , 1) , (B ;−4) , (C , 1).
Calculer GM et en déduire la nature de l'ensemble Γ..
d) Tracer Γ.

11

ABCD est un quadrilatère du plan . G est le centre de gravité du triangle ABD et H le centre de gravité du triangle CBD. K est le milieu de [GH].
1) Faire un dessin (très soigneusement).
2) Démontrer que K est le barycentre de (A , 1) , (B , 1) , (D , 1) , (C , 1) , (B , 1) , (D , 1)
3) Exprimer alors K comme barycentre de A , B , C et D.
4) Soit I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD].
Démontrer que I , J et K sont alignés . Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.
5) Soit E le centre de gravité du triangle ABC et F le centre de gravité du triangle DAC . L est le milieu de [EF] .
Démontrer que les points I , J , K et L sont alignés.

12

Soit (O ;$\vec{i}$;$\vec{j}$) un repère orhonormé du plan.
Soit A, B , C et D les points de coordonnées respectives (3; 3) , ($-1;-1$) , ($-2;-3$) et (3;-3) .
1°) Déterminer les coordonnées du point E tel que BCDE soit un parallélogramme.
2°) Déterminer les coordonnées du barycentre G de (A , 2) , (B , 1) , (C , 1) , (D , 1) , (E , 1).
3°) Soit L le centre du parallélogramme BCDE.
a) Démontrer que les points A , G et L sont alignés.
b) Démontrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$.
c) Que représente le point G pour le triangle ABD ?
4°) a) Déterminer les coordonnées de I et J , milieux respectifs des segments [AB] et [AE].
b) Démontrer l'alignement des points I, G et D et des points C, G et J.

13

Soit ABC un triangle. (AB = 6 cm, AC = 7 cm et BC = 8 cm).
E est le barycentre de (A , 1) , (B ,-2) , (C , -1).
F est le barycentre de (A , -2) , (B , -1) , (C , 1)˙ G est le barycentre de (A , -1) , (B , 1) , (C, -2).
a) Construire les points E, F et G.
b) Démontrer que le centre de gravité H du triangle EFG est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

14

Soit ABCD un carré.
On munit le plan du repère (A ; $\vec{i}$;$\vec{j}$). Soit P la représentation graphique dans ce repère de la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x^2$.
1°) Pour quelles valeurs du réel m, peut-on définir le point G_m barycentre de (A , 7) , (B , 8) , (C , 2), (D , m) ?
2°) Calculer les coordonnées (x_{G_m} ; y_{G_m}) de G_m en fonction de m.
3) Déterminer pour quelles valeurs de m, le point G_m est sur P.

15

Soit ABC un triangle, A' , B' , et C' les milieux des côtés et M un point donné.
On note A_1, B_1 et C_1 les symétriques du point M par rapport à A' , B' , et C' .
On désigne par M' barycentre des points (A,1) (B,1) (C,1) et (M,-1)
1°) Montrer que les droites (AA_1) ; (BB_1) et (CC_1) sont concourantes en M '.
2°) Soit G le centre de gravité de ABC. Montrer que M ' , M et G sont alignés et préciser la position de M ' sur la droite (MG).

16 ABC un triangle ; à tout réel m, on associe le point G_m barycentre de (A ; 2) ; (B ; m) et (C ; $-m$). On note O le milieu de [BC].
1°) Démontrer que, lorsque m décrit l'ensemble des réels, le lieu de G_m est une droite Δ que vous préciserez.
2°) a) Construisez G_2 et G_{-2} 1.
b) On suppose m différent de 2 et -2. Soit G_m un point de Δ distinct de A, G_2 et G_{-2} .
Démontrer que (BG_m) coupe (AC) en un point noté I et que (CG_m) coupe (AB) en un point noté J.
e)Dans le repère (A ;$\vec{i}$; $\vec{j}$), calculez en fonction de m les coordonnées de I et J. Déduisez-en que les points O, I et J sont alignés.

17

Soient ABC un triangle non rectangle et A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB]. On note O le centre du cercle circonscrit au triangle.
1°)Soit H le point du plan défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
a) Montrer que : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\ \overrightarrow{OA'}$.
b) En déduire $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{OA'}$.
c) Montrer que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC).
d) Pourquoi la droite (BH) est-elle perpendiculaire à (AC) ? En déduire la nature du point H pour le triangle ABC.
2°) On note G le centre de gravité du triangle ABC.
a) Montrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
b) Dans quel cas a-t-on O = G = H ?
c) Le cas précédent excepté, montrer que les points O, G et H sont alignés sur une droite, que l'on appelle la droite d'Euler du triangle.
d) Montrer que le résultat précédent reste valable si le triangle est rectangle.

18 (unité : 1 cm).
1. Construire un triangle ABC tel que AC=12, BA=10 et CB= 8, et placer le barycentre G de (A, 1), (B, 2) et (C, 1) .
2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que $||\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = AC$.
3. Soit E l'ensemble des points N tels que $||\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}|| = ||\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}||$.
a) Montrer que le point B appartient à E .
b) Déterminer et représenter l'ensemble E .

19 Soit un triangle ABC. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que
$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ soit colinéaire au vecteur .

20 Soit IJK un triangle. On note A le symétrique de K par rapport à J, B le symétrique de I par rapport à K et C le symétrique de J par rapport à I. (inutile de faire une figure).
1°) Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$, puis exprimer$\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AC}$.
En déduire que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{7}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
2°) Soit P le point défini par $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{BC}$.
Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3°) En déduire que les points A, K, J et P sont alignés.

Angles orientés

1 Sur le cercle trigonométrique de centre O, placer dans chaque cas, deux points A et B tels que la mesure principale de $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ soit :
$-\frac{2\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{6}$

2 Dans chaque cas, déterminer la mesure principale de l'angle :
$\frac{5\pi}{3}$ $-\frac{40\pi}{3}$ $\frac{35\pi}{6}$ $\frac{21\pi}{4}$ $\frac{53\pi}{2}$ $-\frac{13\pi}{7}$

3 C est le cercle trigonométrique de centre O et A est un point de C. Dans chaque cas, placer le point M tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ soit :
$\frac{7\pi}{2}$ $\frac{23\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{6}$ $-\frac{47\pi}{3}$ $\frac{1308\pi}{2}$ $-\frac{33\pi}{4}$ $\frac{67\pi}{5}$ $-\frac{65\pi}{7}$

4 Exprimer les mesures d'angles en radians puis déterminer une mesure principale pour :
$820°$ $-231°$ -205 gr 312 gr

5 $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ est un repère orthonormal. A est le point de coordonnées A(2 ;1).
a) Construire le point B tel que $||\overrightarrow{AB}||=5$ et $(\overrightarrow{j},\overrightarrow{AB})=-\frac{\pi}{6}$
b) Construire le point C tel que $||\overrightarrow{BC}||=5$ et $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=\frac{2\pi}{3}$
c) Déterminer la mesure de $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{BC})$.

6 $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ est un repère orthonormal. $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\sqrt{3};1)$.
Déterminer la mesure principale en radians de l'angle $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{u})$.

7 Tracer un hexagone régulier ABCDEF de centre O. Donner, en radians, la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :
$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AF})$ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE})$ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC})$ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO})$ $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AF})$ $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE})$ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$

8 A, B et C sont des points tels que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=-\frac{\pi}{6}$.
Déterminer $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC})$ $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA})$.

9 $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont des vecteurs non nuls tels que $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})=\frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k})=\frac{2\pi}{3}$.
a) Faire une figure et déterminer $(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.
b) Placer un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $(\overrightarrow{j},\overrightarrow{u})+(\overrightarrow{k},\overrightarrow{u})=0$

10 $\overrightarrow{u}$ est le vecteur tel que $||\overrightarrow{u}||=4$ et $(\overrightarrow{j},\overrightarrow{u})=\frac{\pi}{3}$.
Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u}$

11 $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs tels que $\overrightarrow{u}(-3;\sqrt{3})$ et $(\overrightarrow{v}(1;-2)$.
Déterminer une approximation de la mesure principale de $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

12 $\overrightarrow{u}$ est le vecteur non nul de coordonnées (a ;b).
Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$ et $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\frac{\pi}{2}$.

13 ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$.
Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$.

14 $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs non nuls tels que $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=\frac{\pi}{5}$.
Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v})$; $(\overrightarrow{v};-\overrightarrow{u})$ et $(-\overrightarrow{u};-\overrightarrow{v})$.

15 ABC est un triangle rectangle isocèle tel que AB=AC et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$.
D est un point tel que $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})=\alpha$.
Déterminer $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BC})$ en fonction de α.

16 $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ est une base orthonormale directe. $\overrightarrow{u}(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{v}(-4;2)$sont deux vecteurs.
a) Déterminer l'ensemble des mesures en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{u})$.
b) Déterminer une approximation de la mesure principale en radians de l'angle $(\overrightarrow{j};\overrightarrow{v})$.

17 ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$. C est le cercle circonscrit à ce triangle. Soit O son centre, A', B' et C' sont des points de C tels que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'})=(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'})=;\overrightarrow{OC});\overrightarrow{OC'}$.
a) En utilisant la relationde chasles, démontrer que $(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OC'})=(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}=$ puis $(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'})=(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OA'})=(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA})$.
b) Quelle est la nature du triangle A'B'C' ?

18 ABC est un triangle isocèle avec AB=AC. θ est la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ et O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
a) On suppose que $\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$.
Démontrer qu'une mesure en radians de l'angle $\widehat{BOC}$ est 2θ.
On suppose que $\theta \in]\frac{\pi}{2};\pi[$.
Démontrer qu'une mesure en radians de l'angle $\widehat{BOC}$ est $2\pi - 2\theta$.
Démontrer que 2θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$.

19 ABCD est un carré. ABJ et CBK sont des triangles équilatéraux tels que J est à l'intérieur du carré et K est à l'extérieur.
1) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DJ})$.
2) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DK})$.
3) Démontrer que les points D , J et K sont alignés.

Trigonométrie

20 Trouver à l'aide de la calculatrice, un réel x tel que :

a) x$\in$ $[0\,;\pi]$ et cos x$=-0,6$ b) c $\in [-\pi;0]$ et cos $=-0,8$

c) x $\in [-\pi;0]$ et cos x$=\frac{1}{2}$ d) x $\in [-\pi;0]$ et sin x$=-0,3$

21 Dans chaque cas, déterminer sin x ou cos x sachant que :

a)$0 < x < \frac{\pi}{2}$ et sin x$=\frac{1}{4}$ b) $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ et sin x$=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ et cos x$=-\frac{1}{5}$

22 Exprimer en fonction de sin x et cos x :

A= $cos(\frac{\pi}{2}+x)+cos(2\pi-x)+2\ sin(\pi-x)+cos(\pi+x)$

B=2 $cos\ x+3\ cos(\pi+x)+6\ sin(\frac{\pi}{2}-x)$

C= $cos(\frac{5\pi}{2}-x)+cos(\pi-x)+sin(5\pi-x)$

23 Exprimer en fonction de cos x et de sin x :

cos(x+$\frac{\pi}{4}$) sin(x+$\frac{\pi}{4}$) cos(x+$\frac{\pi}{3}$) sin(x+$\frac{\pi}{3}$)

24 a) Calculer $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$.

b) En déduire la valeur exacte de cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$.

c) Calculer cos $\frac{5\pi}{12}$ et sin $\frac{5\pi}{12}$.

d) Calculer cos $\frac{7\pi}{12}$ et sin $\frac{7\pi}{12}$.

25 Exprimer en fonction de cos x, sin x, cos y et sin y :

A=cos(x+y)+cos(x−y) B=cos (x+y)−cos(x−y) C=sin(x+y)+sin(x−y) D=sin(x+y)−sin(x−y)

26 Montrer que pour tout réel x, on a :

$sin(\frac{3\pi}{2}+x)+cos\frac{27\pi}{2}-x)+sin(3\pi+x)-cos(7\pi+x)=-2\ sin\ x$

$cos\ x+cos(x+\frac{2\pi}{3})+cos(x+\frac{4\pi}{3})=0$

$sin\ x+sin(x+\frac{2\pi}{3})+sin(x+\frac{4\pi}{3})=0$

27 Montrer que lorsque x$\neq k\frac{\pi}{2}$, k$\in\mathbb{Z}$, on a :

$\frac{sin\ 3x}{sin\ x}-\frac{cos\ 3x}{cos\ x}=2$

28 Démontrer que pour tout réel x, on a : (On utilisera $sin^2x=1-cos^x$)

a) $sin^4x+cos^4x+cos^2x-sin^2x=0$

b) $sin^4x(3-2\ sin^2x)+cos^4x(3-2\ cos^2x)=1$

c) $sin^6x+cos^6x-2\ sin^4x-cos^4x+sin^2x=0$

29 On donne $cos\ \frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $sin\ \frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

a) Déterminer les valeurs exactes de cos $\frac{3\pi}{8}$ et sin $\frac{3\pi}{8}$.

b) Calculer A=$cos^2(\frac{\pi}{8})+cos^2(\frac{3\pi}{8})+cos^2(\frac{5\pi}{8})+cos^2(\frac{7\pi}{8})$

B=$sin^2(\frac{\pi}{8})+sin^2(\frac{3\pi}{8})+sin^2(\frac{5\pi}{8})+sin^2(\frac{7\pi}{8})$

30 (Difficile)
Démontrer que pour tout réel x, on a :
$sin\ 3x = -4\sin^3 x + 3\ sin\ x$ $\qquad$ $cos\ 4x = cos^4 x - 6\ cos^2 x\ sin^2 x + sin^4 x$

Equations trigonométriques

31 Résoudre sur$]-\pi;\pi]$, les systèmes d'équations d'inconnu θ

$$\begin{cases} cos\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\ \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} cos\ \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\ \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} cos\ \theta = 1 \\ sin\ \theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} cos\ \theta = -\frac{1}{2} \\ sin\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} cos\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\ \theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} cos\ \theta = 0 \\ sin\ \theta = 1 \end{cases}$$

32 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi;\pi]$.

$sin\ x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $cos(2x - \frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $cos^2 x - sin^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$sin\ x = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $sin(2x) = sin(x + \frac{\pi}{3})$ $\qquad$ $4\ cos^2 x - 3 = 0$

$sin(3x) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $cos(3x) = cos(\frac{\pi}{4} - x)$ $\qquad$ $cos^2 x + 2\ cos\ x - 3 = 0$

$cos(2x) = -1$ $\qquad$ $sin(2x - \frac{\pi}{6}) = cos(x + \frac{\pi}{4})$ $\qquad$ $sin^2 x - 5\ sin\ + 6 = 0$

$cos(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $sin\ x\ cos\ x = \frac{1}{4}$

33 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les systèmes suivants :

$$\begin{cases} cos\ 2x = cos\ y \\ y - x = \frac{\pi}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} \\ 2\ sin\ x = sin\ y \end{cases}$$

34 Résoudre l'équation : $\qquad 4\ cos^4 x - 37\ cos^2 x + 9 = 0$

35 1°) Exprimer en fonction de sin x et cos x : $\quad sin(x + \frac{\pi}{4})$ $\quad$ et $\quad cos(x + \frac{\pi}{4})$.
2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations :
a)sin x+cos x=0 $\qquad$ c) sin x-cos x=$\sqrt{2}$.
b) sin x+cos x=$\sqrt{2}$ $\qquad$ d) sin 3x-cos 3x=-1.

36 Résoudre dans $]-\pi;\pi]$, les équations :
a) 2 sin x$-$ 1=0 $\qquad$ c) $sin^2 x - cos^2 x - sin\ x = 0$
b) $sin(x + \frac{\pi}{2}) = cos(3x + \pi)$ $\qquad$ d) $cos\ x + sin\frac{\pi}{2} = 0$

37 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$cos(2x - \frac{\pi}{6}) = cos(\frac{7\pi}{3})$ $\qquad$ $4\ sin^2 x - 3 = 0$

$sin(2x - \frac{\pi}{6}) = sin(\frac{5\pi}{6})$ $\qquad$ $sin(3x + \frac{\pi}{7}) = cos(\frac{3\pi}{7})$

$cos(\frac{3\pi}{5} + x) = cos(\frac{\pi}{5} - 3x)$ $\qquad$ $2\ cos^2 x + \sqrt{3}\ cos\ x - 3 = 0$

38 1°) Développer $(sin^2x + cos^2x)^3$ et monter que pour tout réel x

$$sin^6x + cos^6x = \frac{1}{8}(5 + 3\ cos\ 4x)$$

2°) Résoudre l'équation : $sin^6x + cos^6x = \frac{3}{8}$.

39 En passant par l'intermédiaire de cos 2x, résoudre :

a) cos x=$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ cos x=$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{6}$

40 Résoudre les inéquations suivantes :

$sin\ x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $2\ cos^2x - cos\ x + 1 \leq 0$ dans $[0;\pi]$

$sin\ 4x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$ $2\ sin^2x + sin\ x - 1 > 0$ dans $[0;\pi]$

$2\ cos\ 2x - \sqrt{3} \leq 0$ dans $[0;\frac{\pi}{2}]$ $(\sqrt{2}\ sin\ x + 1)(4\ cos^2x - 3) < 0$ dans $[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$

$cos\ x \geq sin\ x$

Etude de fonctions trigonométriques

41 Donner les dérivées des fonctions suivantes et étudier leur signe :

$f: x \mapsto sin(2x - \frac{\pi}{6})$ $g: x \mapsto sin\ x\ cos\ x$ $h: x \mapsto 4\ sin^2x - 8\ sin\ x + 5$

$j: x \mapsto \frac{x}{sin\ x}$ $k: x \mapsto \frac{sin\ x}{cos\ x}$ $l: x \mapsto \frac{sin\ 2x}{cos\ 3x}$

42 Dire si les fonctions suivantes sont périodiques et préciser leur période.

$f: x \mapsto sin(x - \frac{\pi}{6})$ $g: x \mapsto sin\ 5x$ $h: x \mapsto cos\ 2x + cos\ 3x$

$j: x \mapsto x - cos\ x$ $k: x \mapsto sin\ x\ cos\ 2x$

43 Soit la fonction f: $x \mapsto 3 - 2\ cos(6x)$
Démonter que f est paire, périodique de période $\frac{\pi}{3}$ est a pour maximum 5.

44 Donner la période, étudier la parité, les variations et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$x \mapsto sin\ 2x$ $x \mapsto 3\ cos(2x + \frac{\pi}{3})$ $x \mapsto sin^2x$

$x \mapsto cos(3x + 2)$ $x \mapsto sin\ x\ (1 + cos\ x)$ $x \mapsto cos\ x + cos^2x$

Formules de trigonométrie

Valeur des angles

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$sin\ x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$tan\ x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$interdit$	0

Formulaire

$cos(t+2k\pi) = cos\ t$ $sin(t+2k\pi) = sin\ t$	$cos(-t) = cos\ t$ $sin(-t) = -sin\ t$	$cos(\pi+t) = -cos\ t$ $sin(\pi+t) = -sin\ t$
$cos(\pi-t) = -cos\ t$ $sin(\pi-t) = sin\ t$	$cos(\frac{\pi}{2}-t) = sin\ t$ $sin(\frac{\pi}{2}-t) = cos\ t$	$cos(\frac{\pi}{2}+t) = -sin\ t$ $sin(\frac{\pi}{2}+t) = cos\ t$

$cos\ ^2a + sin\ ^2a = 1$

$cos\ (a+b) = cos\ a\ cos\ b - sin\ a\ sin\ b$	$sin\ (a+b) = sin\ a\ cos\ b + sin\ b\ cos\ a$

$cos\ (a-b) = cos\ a\ cos\ b + sin\ a\ sin\ b$	$sin\ (a-b) = sin\ a\ cos\ b - sin\ b\ cos\ a$

$cos\ 2a = cos^2a - sin^2a = 1 - 2\ sin^2a = 2\ cos^2a - 1$	$sin\ 2a = 2\ sin\ a\ cos\ a$

$cos\ a = 1 - 2\ sin^2\ \frac{a}{2} = 2\ cos^2\ \frac{a}{2} - 1$	$sin\ a = 2\ sin\ \frac{a}{2}\ cos\ \frac{a}{2}$

Dérivées

(sin x)'=cos	(cos x)'=−sin x

Généralités

1 Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls d'angle α tels que $||\overrightarrow{u}|| = \frac{5}{2}$; $||\overrightarrow{v}||$=4 et $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

2 Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs orthogonaux de norme respectives 4 et 5.
Calculer $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2$ et $(-\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}) \cdot (2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$.

3 Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que $||\overrightarrow{u}|| = 2$; $||\overrightarrow{v}|| = 3$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3\sqrt{3}$.
Calculer l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

4 On donne un triangle ABC rectangle en A et sa hauteur (AH).
Démontrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.

5 $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, de diamètre [AB]. C est un point de ce cercle, distinct de A et de B. H est le projeté orthogonal de C sur [AB]. M est un point du segment [CH].
Démontrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AC^2$. (Remarquer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$).

6 ABC est un triangle. I est le milieu de [BC]. H est le pied de la hauteur issue de A. En écrivant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, démontrer que :

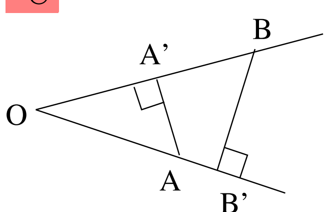
a) $AC^2 - AB^2 = 2\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI}$

b) En déduire que $AC^2 - AB^2 = -2\ \overline{BC} \times \overline{IH}$

c) Calculer IH lorsque AC=4 ; AB=3 et BC=6.

7 ABC est un triangle isocèle en A. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

8



Montrer que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OB}$?

9 Pour tirer un chariot peu élevé de O en A, un homme exerce une force $\overrightarrow{F}$ d'intensité 350 newtons selon un angle de 45° avec la direction des rails.

a) Quel est le travail W effectué par cette force ? (Rappel : $W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{OA}$.

b) Quelle est l'intensité qu'il aurait dû exercer pour effectuer le même travail en poussant dans l'axe de son déplacement ?

10 ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R.
Démontrer que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{R^2}{2}$.

11 ABCD est un losange tel que AC=4 et BD=2.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$.

12 ABCD est un trapèze rectangle tel que (AB)//(CD) ; (AD)⊥(BC) ; AB=5 ; AD=4 et DC=8.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$.

13 (d) et (d') sont deux demi-droites de même origine O et perpendiculaires en O. A et B sont deux points de (d). C et D sont deux points de (d') tels que OC=OA et OD=OB. I est le milieu de [AD].
Démontrer par deux méthodes que la médiane (OI) du triangle OAD est la hauteur issue de O du triangle OBC.
• Première méthode : Calculer $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC}$.
• Deuxième méthode : Utiliser un repère orthonormé.

14 ABCD est un carré. M est le milieu de [AD] et N est le milieu de [DC].
Démontrer que (AN) et (BM) sont perpendiculaires.

15 ABC est un triangle rectangle en A. M est le milieu de [BC] et H est le pied de la hauteur issue de A.
H se projette orthogonalement en K sur (AB) et en L sur (AC).
Montrer que les droites (AM) et (KL) sont perpendiculaires. (Remarquer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KL}$.)

16 ABC est un triangle équilatéral de côté a. x est un réel de l'intervalle]0 ;1[. M, N et P sont les points tels que $\overrightarrow{AM}$=x $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN}$=x $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CP}$=x $\overrightarrow{CA}$.
a) Calculer AM^2, AP^2, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AP}$ et MP^2.
b) Quelle est la nature du triangle MNP ?

Lignes de niveaux

17 ABC est un triangle et Δ est une droite qui passe par A. B et C se projettent orthogonalement en Q sur (AB). (B'P) et (C'Q) se coupent en M.
a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'}$.
b) Montrer que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{AB'}$.
c) En déduire que (AM) et (BC) sont perpendiculaires.
d) Sur quelle ligne fixe se déplace M lorsque Δ varie.

18 A et B sont deux points tels que AB=4. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M tels que :
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=1$ b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=8$
c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$ d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} >0$

19 On donne deux points A et B tels que AB=3. Construire les points M tels que :
a) AM=4 et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=6$ b) AM=$\frac{5}{2}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-9$.

20 Soient A et B deux points. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\ AB^2$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -AB^2$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = AB^2$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -2\ AB^2$

$MA^2 - MB^2 = 2\ AB^2$ $\quad\quad$ $MA^2 + MB^2 = \frac{1}{2}\ AB^2$

$(2\ \overrightarrow{MA} - 5\ \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ $\quad\quad$ $2\ MA^2 + 3\ MB^2 = \frac{7}{5}\ AB^2$

21 O est le milieu du segment [AB].

a) Démontrer que pour tout point M, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$.

b) Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM}$?

22 ABCD est un carré de côté 2. Déterminer et tracer :

a) La ligne de niveau 4 de la fonction : $M \mapsto AM^2$.

b) La ligne de niveau 2 de la fonction : $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$.

c) La ligne de niveau 0 de la fonction : $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$.

d) La ligne de niveau 0 de la fonction : $M \mapsto AM^2 - BM^2$.

e) La ligne de niveau 4 de la fonction : $M \mapsto AM^2 + BM^2$.

f) La ligne de niveau 2 de la fonction : $M \mapsto AM^2 - BM^2$.

Coordonnées

23 Soit $(O ; \overrightarrow{i} ; \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal.

a) Indiquer un vecteur orthogonal à la droite (d_1) d'équation 3x−y+5=0.

b) (d_2) est la droite d'équation 2x+6y−12=0. Que dire de (d_1) et (d_2) ?

c) Déterminer une équation de la droite (d_3) passant par l'origine et perpendiculaire à la droite (d_1).

24 Soit $(O ; \overrightarrow{i} ; \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal et les points A et B de coordonnées A(0 ;3) et B(4 ;1). Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB].

25 Soit $(O ; \overrightarrow{i} ; \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal. Déterminer une équation :

a) du cercle de centre C$(-2; 1)$ et de rayon 3.

b) du cercle de diamètre [OA] avec A(0 ;2).

c) du cercle de centre C$(2; -1)$ qui passe par B$(-1; 3)$.

d) du cercle qui passe par les points A(4 ;0) ; B(0 ;2) et C(−4 ;0).

26 Déterminer le centre et le rayon du cercle C d'équation :

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ $\quad\quad$ $x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ $\quad\quad$ $x^2 + y2 - 6x + 8y + 50 = 0$

27 Ecrire une équation du cercle C de centre $\Omega(4; 6)$ tangent à la droite d'équation 3x+3y−7=0

28 Soit C le cercle de centre A(2 ;0) et de rayon 5.

a) Montrer que M$(-4; 1)$ est extérieur à C.

b) Déterminer l'équation des tangentes à C passant par M.

Divers

29 ABC est un triangle. On construit extérieurement à ce triangle deux carrés ABDE et ACFG. I est le milieu de [BC].
Démontrer que la médiane (AI) du triangle ABC est hauteur du triangle AEG. (On montrera que $cos(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AC}) = cos(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB})$).

30 C est un cercle de centre O et de rayon R. M est un point non situé sur le cercle. Par M, on trace une droite qui coupe C en P et Q. Soit P_1, le point diamétralement opposé à P.
a) Montrer que $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MP_1}$
b) En déduire que $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = MO^2 - R^2$
c) Etudier le signe de $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ suivant la position de M par rapport au cercle C.

31 Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.
Déterminer l'ensemble des points M tels que :
a) $MA^2 - MB^2 - 2\ a^2$.
b) $MB^2 = 3\ MC^2$.

32 Soit ABC un triangle.
1°) Déterminer le point G tel que pour tout point M du plan, on ait :
$\overrightarrow{MA} - 2\ \overrightarrow{MB} + 3\ \overrightarrow{MC} = 2\ \overrightarrow{MG}$
2°) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que :
$(\overrightarrow{MA} - 2\ \overrightarrow{MB} + 3\ \overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

33 Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère orthonormal. (d) est la droite d'équation y=−4. Le point M(X ;Y) se projette orthogonalement en H sur la droite (d).
a) Calculer MO^2 et MH^2.
b) C est le cercle de centre M tangent en H à la droite (d). Déterminer une équation de ce cercle.
c) Quelle relation doit lier les coordonnées (X ;Y) de son centre M pour que ce cercle passe par O ?
d) On suppose que X et Y sont liés par la relation trouvée en c). tracer la courbe (P) décrite par le point M.

34 Soit ABC un triangle de hauteur (AH) tel que BC=4 ; AB=3 et $\widehat{ABC} = 120°$. Soit f la fonction définie du plan dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(M) = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AM}$$

1°) Calculer f(A) et f(B).
2°) Soit Δ l'axe passant par B et orienté de B vers C.
Calculer $\overline{BH}$ et $\overline{CH}$. En déduire f(C).
3°) Déterminer le réel k tel que la ligne de niveau k de f soit la médiatrice du segment [BC].

35 Soit un triangle ABC rectangle en A tel que AB=8 et AC=4.
1°) Construire le barycentre G des points (A ;3) ; (B ;−1) ; (C ;2).
2°) Déterminer l'ensemble des points du plan vérifiant :

$$3\ MA^2 - MB^2 + 2\ MC^2 = -32$$

3°) Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant

$$||3\ \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\ \overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}||$$

36 On considère un carré ABCD.
1°) Déterminer le barycentre des points (A ;1) ; (B ;−3) ; (C ;−3) ; (D ;1).
2°) Déterminer l'ensemble des points M tels que

$$MA^2 - 3\,\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MD} = 0$$

37

ABCD est un carré de côté a et m est un réel. les points A', B', C' et D' sont tels que $\overrightarrow{DA'}$=m $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{BC'}$=m $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB'}$=m $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD'}$=m $\overrightarrow{CD}$.
a) Construire la figure avec m=$-\frac{1}{3}$
b) Démontrer que le quadrilatère A'B'C'D' est un carré.
c) Calculer l'aire s' de A'B'C'D' en fonction de l'aire s de ABCD.
d) Quand a-t-on s'=2 s ?

38 Soit ABC, un triangle, A'B'C' les pieds des hau teurs issues de A, B et C.
a) Démontrer que les propositions (1) et (2) sont équivalentes :
(1) M appartient à la hauteur [AA'].
(2) $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MC}$.
b) H est l'intersection des droites (BB') et (CC').
Comparer $\overrightarrow{HA}\,.\,\overrightarrow{HB}$; $\overrightarrow{HB}\,.\,\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HC}\,.\,\overrightarrow{HA}$.
c) En déduire que H est sur le segment [AA'] puis que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

39 Soit ABM un triangle et O le milieu du segment [AB].
a) Démontrer que $MA^2 + MB^2 = 2\ MO^2 + \frac{AB^2}{2}$. (Théorème de la médiane).
b) Application : Soit ABCD un rectangle de centre O et P un point.
Démontrer que $PA^2 + PC^2 = PD^2 + PB^2$.

40 ABCD est un carré de centre O. M est un point du segment [AB]. La perpendiculaire à la droite (DM) menée par A coupe (BC) en P.
a) Démontrer que AM=BP et que les droites (OM) et (OP) sont perpendiculaires.
b) Démontrer que lorsque M décrit le segment [AB], le milieu I de [MP] reste sur une droite fixe (qui est la médiatrice du segment [OP].

41 ABCD est un carré. I est le milieu du segment [AB] et J est le milieu du segment [AD]. M est le milieu de [AI]. H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle IAD.
a) Montrer que $HA^2 = -\overrightarrow{HI}\,.\,\overrightarrow{HD}$ (en partant de $\overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AD} = 0$).
b) Démontrer que les droites (HJ) et (HM) sont perpendiculaires. (On utilisera $\overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{HA})$ et $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD})$.

42 ABC est un triangle, H est son orthocentre. O est le point défini par $\overrightarrow{HO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$.
a) Comparer les longueurs OA, OB et OC. (On montrera que $OA^2 - OB^2 = 0$).
b) En déduire que, dans un triangle, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés.

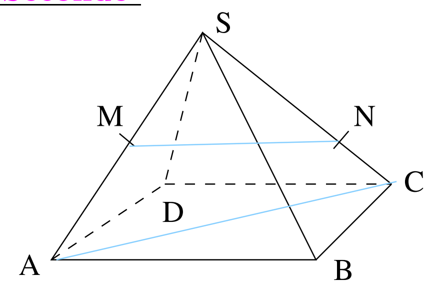
43 ABCD est un carré. M est un point du segment [BD]. M se projette orthogonalement en P sur (AB) et en Q sur (AD). On désire montrer que (CM) et (PQ) sont perpendiculaires.
Première méthode : Poser $\overrightarrow{BM}$=k $\overrightarrow{BD}$. En déduire que $\overrightarrow{AQ}$=k $\overrightarrow{AD}$ et que $\overrightarrow{AP}$=(1-k) $\overrightarrow{AB}$ puis calculer $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{PQ}$
Deuxième méthode : Utiliser le repère (B ;$\overrightarrow{BA}$;$\overrightarrow{BC}$) et M(x ;x).

Révisions de Seconde

1 SABCD est une pyramide régulière à base carrée. M est le milieu de [SA], N est le point de [SC] tel que $SN = \frac{2}{3}SC$.

1. Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont sécantes.

2. Placer le point d'intersection de (MN) et (AC).



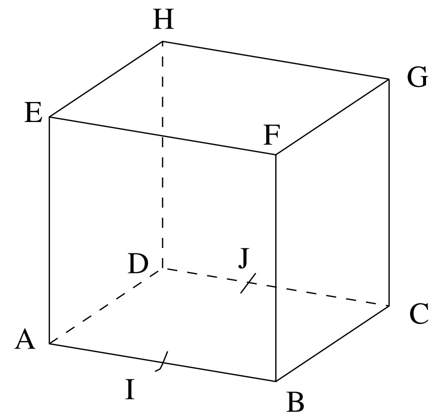
2 ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB].J est le milieu de [CD].

Quel est dans chacun des cas suivants, l'intersection des deux plans ? Justifier chaque réponse.

1. Le plan (AIE) et le plan (BIG).

2. Le plan (ADI) et le plan (BJC).

3. Le plan (HEF) et le plan (BJC).

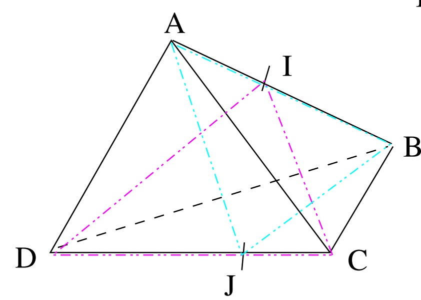


3 Dans un tétraèdre ABCD, I est un point de l'arête [AB], J un point de l'arête [CD].

Le but de l'exercice est de trouver l'intersection des plans (AJB) et (CID).

1. Prouver que chacun des points I et J appartient à la fois aux plans (AJB) et (CID).

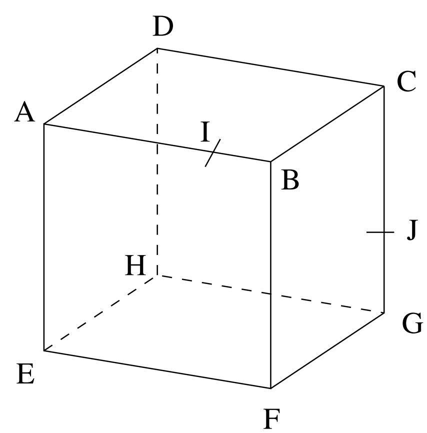
2. Quelle est alors l'intersection de ces deux plans.



4 On considère un cube ABCDEFGH, I est un point de l'arête [AB], J un point de l'arête [CG].

1. Montrer que les points I et J appartiennent à la fois aux plans (ABJ) et (CGI).

2. Quelle est l'intersection des plans (ABJ) et (CGI).



5 ABCD est un tétraèdre, I est un point de l'arête [BC] et J un point de l'arête [CD].

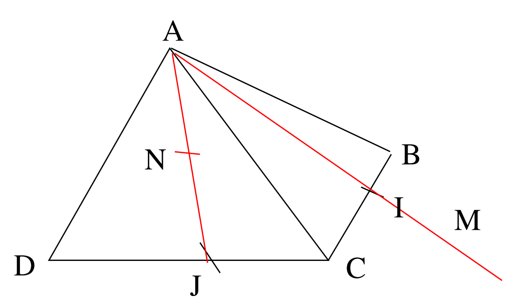
N est un point du segment [AJ] et M un point de la demi-droite [AI) extérieur au segment [AI].

1. Quelle est l'intersection des plans (AIJ) et (BCD) ?

2. a) Démontrer que les points M, N, I et J sont dans un même plan.

b) On note P le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (BCD).

Prouver que P est sur (IJ).



6

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB].

On se propose de représenter la droite Δ, intersection des plans (DFI) et (EFG).

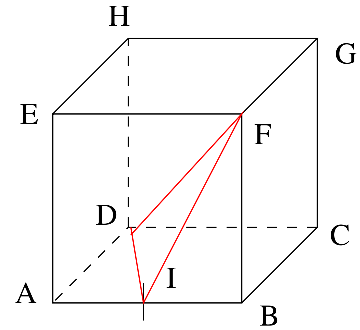
1. Pourquoi F appartient-il à Δ ?

2. Quelle est l'intersection des plans (DIF) et (ABC) ?

3. Que sait-on sur les plans (ABC) et (EFG) ?

En déduire la droite Δ.

4. Tracer Δ puis tracer la section du cube par le plan (DIF).



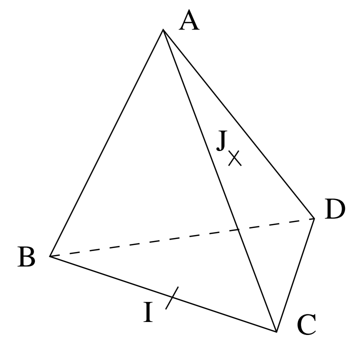
7

Soit ABCD un tétraèdre, I est le milieu de [BC] et J un point de la face ACD (autre que A).

1. Construire l'intersection Δ du plan (AIJ) avec le plan (BCD).

2. Le plan (AIJ) est-il toujours sécant au plan (ABD) ?

Construire l'intersection des plans (AIJ) et (ABD).



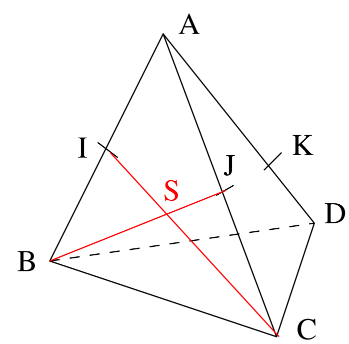
8

Soit ABCD un tétraèdre, I est le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le point du segment [AD] tel que $AK = \dfrac{2}{3}\,AD$.

1. Les droites (CI) et (BJ) se coupent en S. Que représente le point S pour le triangle ABC ?

2. Construire l'intersection des plans (ASD) et (BDC).

3. Déterminer l'intersection de la droite (IK) avec le plan (BCD).



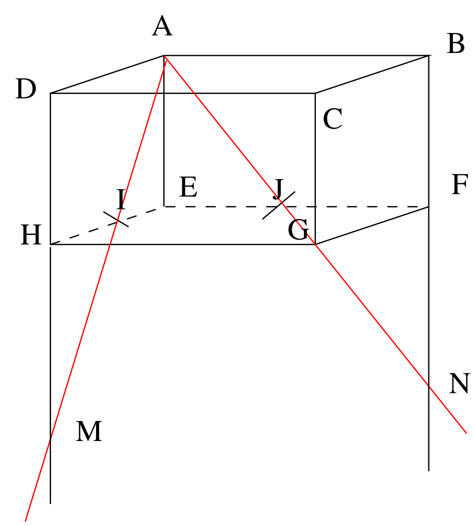
9

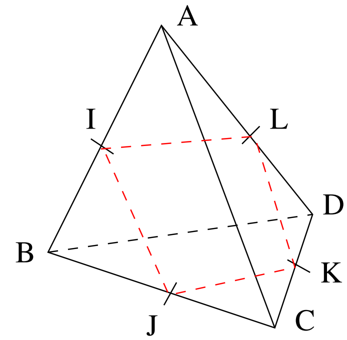
I et J sont les milieux des arêtes [EH] et [EF] du parallélépipède rectangle ABCDEFGH.

Les droites (AI) et (DH) se coupent en M.

Les droites (AJ) et (BF) se coupent en N.

Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.

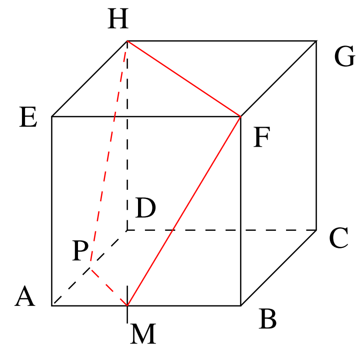




10 ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AB], J celui de [BC], K celui de [CD], L celui de [AD].

1. Démontrer que les droites (IL) et (JK) sont parallèles et que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

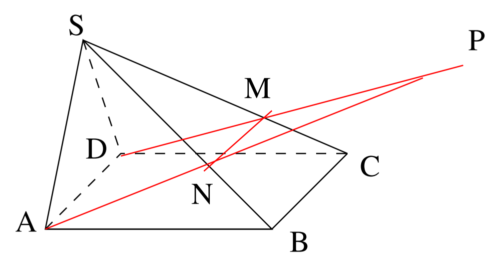
2. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?



11 ABCDEFGH est un cube. M est un point de l'arête [AB]. Le plan (FHM) coupe (DA) en P.

Démontrer que les droites (FH) et (MP) sont parallèles.

12 SABCD est une pyramide de sommet S ; la base ABCD est un parallélogramme. M est un point de l'arête [SC] et N de l'arête [SB] ; de plus (MN) est parallèle à (BC).



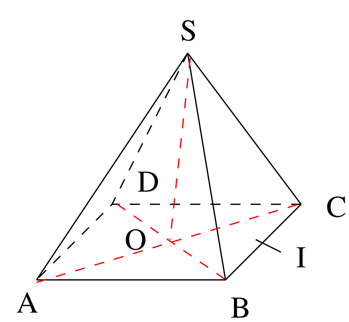
1. Démontrer que les droites (AD) et (MN) sont parallèles.

2. Dans le plan (ADMN), les droites (AN) et (DM) se coupent en un point noté P.

a) Démontrer que le point P appartient à chacun des plans (SAB) et (SDC).

b) Pourquoi la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC) est-elle la droite (SP) ?

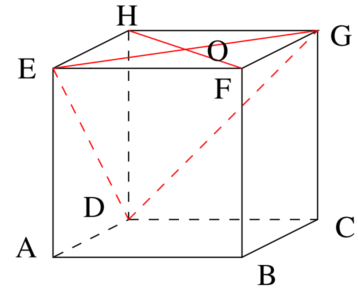
c) En déduire que (SP) est parallèle à (AB) et à (CD).



13 SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD ; O est le centre de ABCD. (SO) est donc la hauteur de la pyramide. I est le milieu de l'arête [BC].

1. Démontrer que (SO) est orthogonale à la droite (CB).

2. En déduire que (CB) est orthogonale au plan (SOI).



14 ABCDEFGH est un cube, AB = 4 cm. O est le centre du carré EFGH.

1. Prouver que la droite (OD) est l'intersection des plans (EDG) et (HDBF).

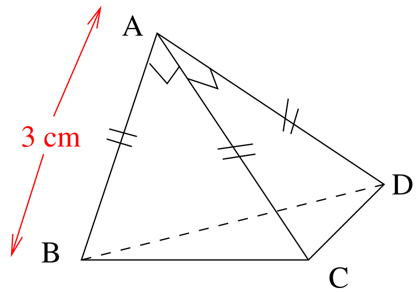
2. a) Dessiner en vraie grandeur le rectangle HFBD, placer O.

b) En calculant tan $\widehat{HDO}$ et tan $\widehat{HDB}$, prouver que
(HB) et (OD) sont perpendiculaires.

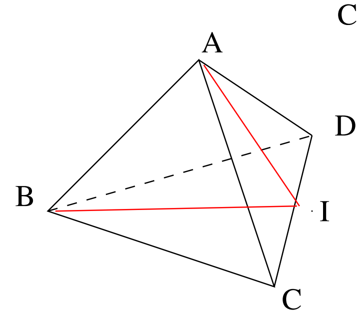
3. a) Démontrer que (HD) est orthogonale à (EG).

b) En déduire que (EG) est orthogonale au plan (HFBD), puis à (HB).

4. Démontrer que (HB) est orthogonale au plan (DEG).

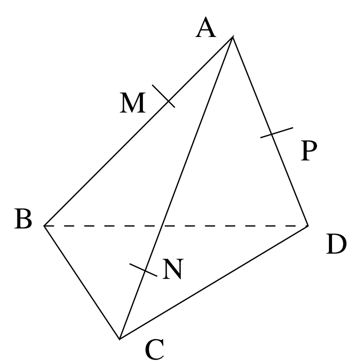


15 Les faces ABC, ACD et ABD de cette pyramide sont des triangles rectangles et isocèles en A et AB = 3 cm.
Calculer le volume V de cette pyramide .



16 ABCD est un tétraèdre régulier, I est le milieu de [CD]. On trace les segments [AI] et [BI].

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.



17 ABCD est un tétraèdre. M est le point de [AB] tel que AM = $\dfrac{1}{3}$ AB, N est le point de [AC] tel que AN = $\dfrac{1}{4}$ AC et P le milieu de [AD].

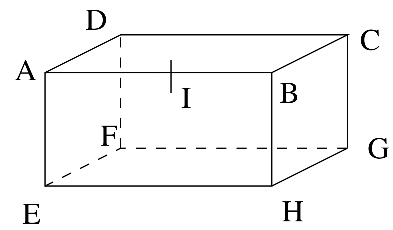
1. Démontrer que (MN) coupe (BC), que (NP) coupe (CD) et que (MP) coupe (BD).

2. On note I, J, K, ces points d'intersection. Démontrer que ces trois points sont alignés.

18 Dans ce pavé, I est le milieu de l'arête [AB].

Construire la trace du plan (IEG) sur le pavé.

Quelle est nature du polygone obtenu ?



19 SABC est un tétraèdre.

La droite (SA) est orthogonale au plan (ABC) et le triangle ABC est rectangle en B.

1. a) Démontrer que (BC) et (SA) sont orthogonales.

b) Démontrer que le triangle SBC est rectangle en B.

2. H est un point de l'arête [AB] ; on trace par H le plan (P)
orthogonal à (AB).

Ce plan coupe (AC) en I, (SC) en J et (SB) en K.

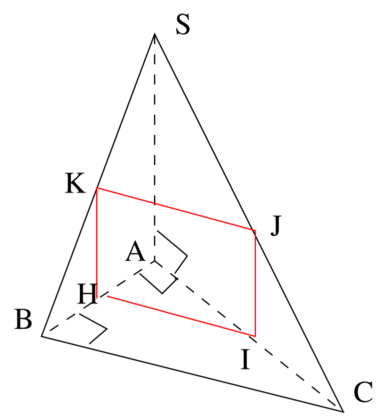
a) Démontrer que les droites (HI) et (BC) sont parallèles.

b) En déduire que les droites (HI) et (KJ) sont parallèles.

c) Démontrer que les droites (KH) et (SA) sont parallèles.

d) En déduire que les droites (HK) et (IJ) sont parallèles.

e) Démontrer que HIJK est un rectangle.



3. On suppose à présent que AB = 1 et que SA = BC = 2. On pose AH = x.

a) Démontrer, en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle ABC, que HI = 2x.

b) Démontrer, en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle SAB, que HK =$2(1-x)$.

c) Calculer l'aire du rectangle HIJK en fonction de x. On note A(x) cette aire.

4. a) Démontrer que $4x(1-x) = 1-(1-2x)^2$.

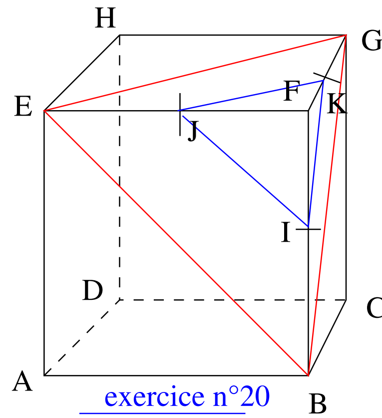
b) Pour quelle valeur de x l'aire A(x) est-elle maximale ?

Quelle est alors la position du point H sur [AB].

Quelle est alors la nature du quadrilatère HIJK ?

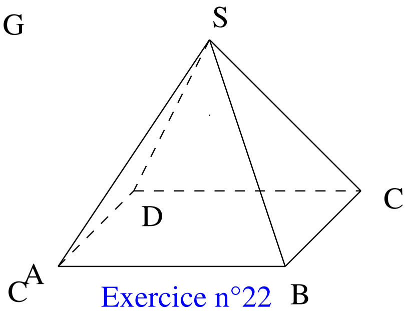
Exercices de Première S

20 Soit ABCDEFG un cube et I, J, K les milieux des arêtes [FB], [FE] et [FG].
Démontrer que les plans (IJK) et (BEG) sont parallèles.



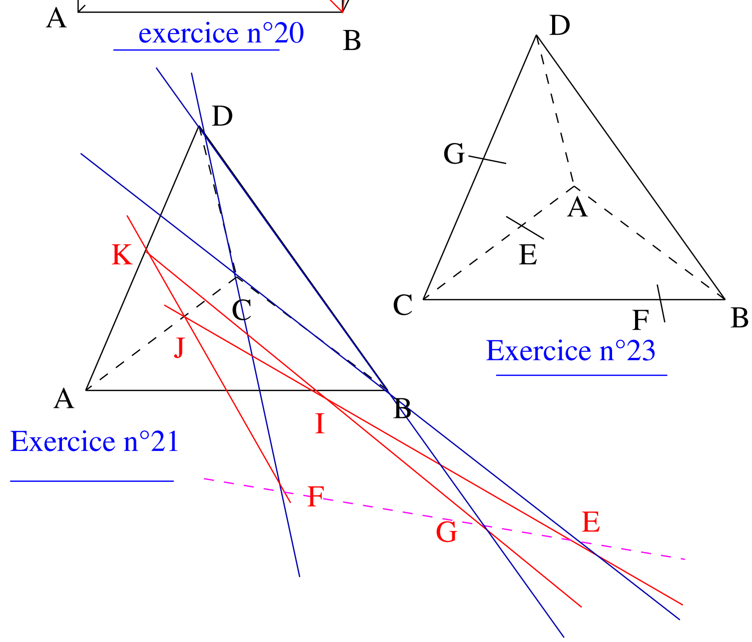
exercice n°20

21 Soit ABCDS une pyramide régulière à base carrée ABCD.
Démontrer que l'intersection des plans (SAB) et (SCD) est une droite parallèle au plan (ABC).



Exercice n°22

22 Soit ABCD un tétraèdre. I, J, K trois points situés respectivement sur les arêtes [AB], [AC], [AD] de telle sorte que les droites (IJ) et (BC) soient se coupent en E, les droites (JK) et (CD) se coupent en F, les droites (IK) et (BD) se coupent en G.
Démontrer que les points E, F et G sont alignés.



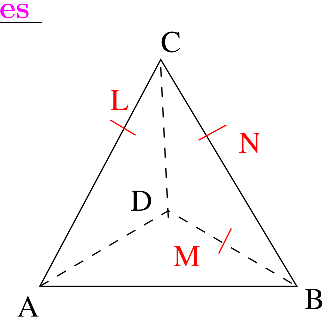
Exercice n°21

23 Soit ABCD un tétraèdre. E, F etG sont trois points situés respectivement sur [AC], [BC] et [CD] et tels que (FG) et (BD) ne soient pas parallèles, (EF) et (AB) ne soient pas parallèles.
1°) Construire l'intersection du plan EFG et de l'arête (BD).
2°) Dessiner l'intersection des plans ABD et EFG.

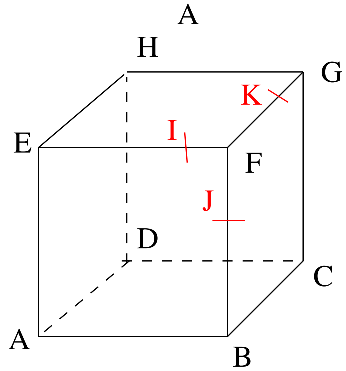
Exercice n°23

Sections de solides

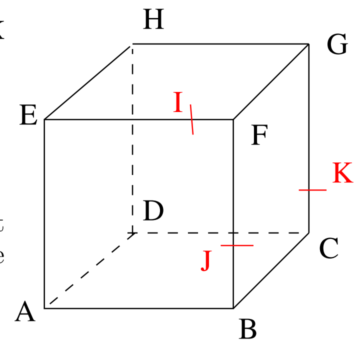
24 Soit ABCD un tétraèdre, L, M et N trois points situés sur les arêtes [AC], [BD] et [CD].
Construire la section du tétraèdre par le plan (LMN).



25 Soit ABCDEFGH un cube. Soit I un point de [EF], J un point de [FB] et K un point de [FG].
Dessiner la section du cube par le plan (IJK).

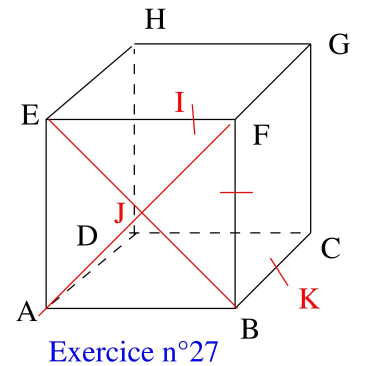


26 Soit ABCDEFGH un cube. Soit I un point de l'arête [EF], J le point tel que $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FB}$ et K le point tel que $\overrightarrow{GK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.
Dessiner la section du cube par le plan (IJK).



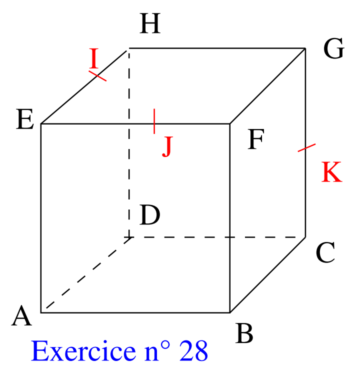
Exercice n°26

27 Soit ABCDEFGH un cube. Soit I un point de l'arête [EF], J le centre de la face ABFE et K le milieu de l'arête [BC].
Dessiner la section du cube par le plan (IJK).



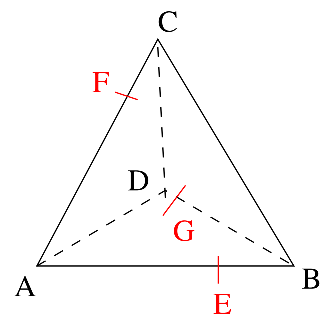
Exercice n°27

28 ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux des arêtes [EH], [EF] et [CG].
Dessiner la section du cube par le plan (IJK).



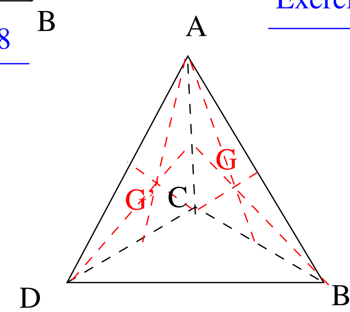
Exercice n° 28

29 Soit ABCD un tétraèdre, E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, F le point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et G le point tel que $\overrightarrow{BG} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BD}$.
Construire la section du tétraèdre par le plan (EFG).



Exercice n°29

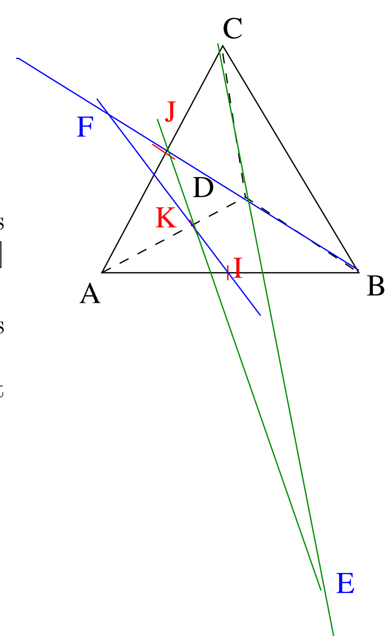
30 Soit ABCD un tétraèdre, G et G' les centres de gravité des triangles ABC et ACD.
1°) Construire la section du tétraèdre par le plan (AGG')
2°) Démontrer que le plan AGG' est parallèle à la droite (BD).



Exercice n°30

Droites et plans parallèles

31
Soit ABCD un tétraèdre, I et J les milieux des arêtes [AB] et [AC], K est le point de l'arête [AD] tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
Les droites (JK) et (CD) se coupent en E. Les droites (IK) et (BD) se coupent en F.
1°) Démontrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
2°) En déduire que (BC)// (EF) .



32 Soit ABCDEFGH un cube, I, J et K les milieux des arêtes [FE], [FG] et [FB].

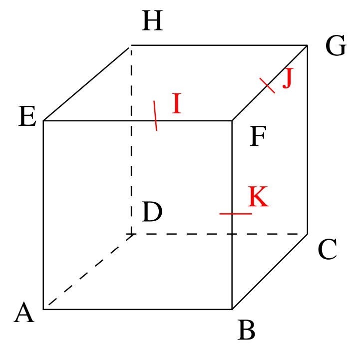
1°) a) Construire le point d'intersection M des droites (IK) et (AE).

b) Construire le point d'intersection L des droites (IJ) et (EH).

c) Construire la droite Δ, intersection des plans (IJK) et (ADH).

2°) Construire la droite Δ', intersection des plans (IJK) et (ADH).

3°) On suppose que les droites Δ et Δ' sont sécantes.
Montrer que les droites Δ, Δ' et (DH) sont concourantes.



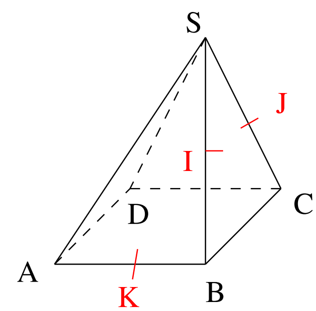
33 Une pyramide SABCD est telle que la base ABCD soit un parallélogramme. Soient I, J et K les milieux des arêtes [SB], [SC] et [AB].

1°) Démontrer que les droites (IJ) et (AD) sont parallèles.

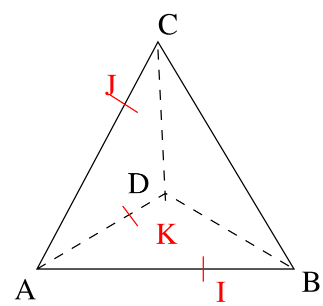
2°) En déduire que le plan (SDK) et la droite (IJ) sont sécants.

3°) a) Construire l'intersection Δ des plans SKD et SBC.

b) Construire l'intersection M de la droite (IJ) et du plan (SKD).



34 Soit ABCD un tétraèdre, I le point de l'arête [AB] tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, J le point de l'arête [AC] tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et K le point de l'arête [AD] tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
Démontrer que le plan (IJK) est parallèle au plan (BCD).

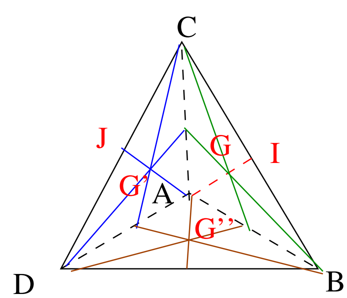


35 Soit ABCD un tétraèdre. G, G' et G" les centres de gravité des faces ABC, ACD et ADB. I et J sont les milieux des arêtes [BC] et [CD].

1°) Démontrer que les droites (IJ) et (GG') sont parallèles.

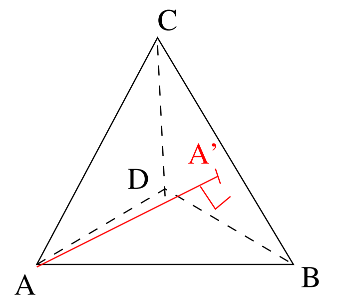
2°) Démontrer que les points G, G' et G" ne sont pas alignés.

3°) Démontrer que les plans (GG'G") et (BCD) sont parallèles.

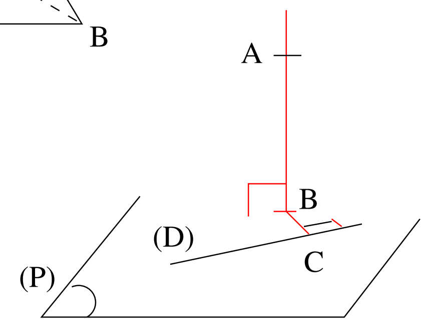


Orthogonalité dans l'espace

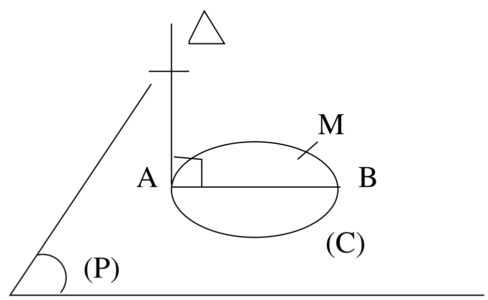
36 ABCD est un tétraèdre tel que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales. A' est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).
a) Montrer que la droite (DC) est perpendiculaire au plan (ABA').
b) Montrer que A' appartient à la hauteur (BH) du triangle BCD.
c) Montrer que [AH] est une hauteur du triangle ACD.



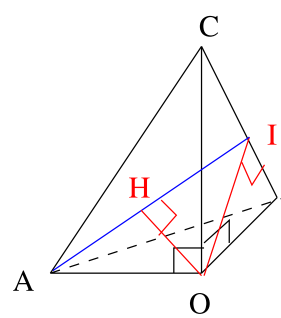
37 Soit (P) un plan, (D) une droite du plan (P). A est un point non situé dans (P). Le point A se projette orthogonalement en B sur (P). Dans (P) le point B se projette orthogonalement en C sur la droite (D).
Démontrer que les droites (AC) et (D) sont orthogonales.



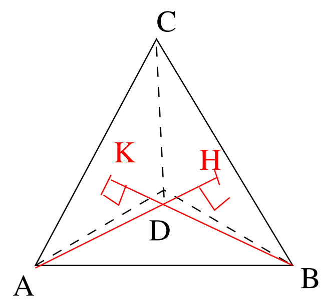
38 Soit (P) un plan, (C) un cercle du plan (P) de diamètre [AB]. Soit Δ la droite passant par A est orthogonale au plan (P). C est un point de la droite Δ et M un point du cercle (C).
Démontrer que les droites (BM) et (CM) sont orthogonales.



39 Soit OABC un tétraèdre trirectangle en O (c'est-à-dire tel que les trois faces issues de O sont orthogonales).
1°) Dans le plan (OBC), le point O se projette orthogonalement en I sur la droite (BC).
Démontrer que la droite (AI) est une hauteur du triangle ABC.
2°) Dans le plan OAI, le point O se projette orthogonalement en H sur la droite (AI).
Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

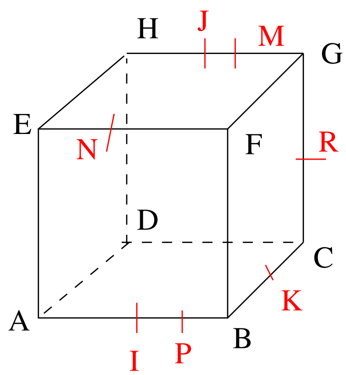


40 Soit ABCD un tétraèdre tel que les arêtes [AB] et [CD] soient orthogonales. Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD) et K le projeté orthogonal de B sur le plan (ACD).
1°) Démontrer que la droite (CD) est orthogonale aux plans (ABH) et (ABK).
2°) a) Justifier que les droites (AH) et (BK) sont coplanaires.
b) Le plan (ABH) coupe la droite (CD) en I.
Que représentent (BK) et (AH) pour le triangle ABI ?

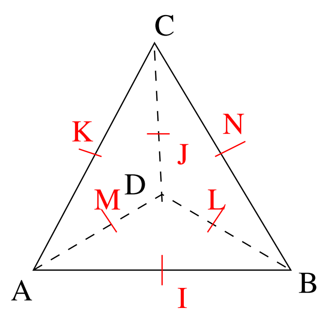


Vecteurs dans l'espace

41 ABCDEFGH est un cube d'arête a.
M, N et P sont les points définis par $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. I, J, K et R sont les milieux respectifs de [AB], [HG], [CB] et [CG].
a) Démontrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{JC}$ et que (IC)//(PQ) et (JC)//(MR).
b) Démontrer que la section du cube par le plan (MNP) est le pentagone MNPQR.
c) Calculer en fonction de a, les longueurs des côtés du pentagone MNPQR.
d) En déduire que $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{QR}$ et que $\overrightarrow{PM} = a\sqrt{2}$.
e) On suppose que a=8. Calculer les angles du pentagone.



42 ABCD est un tétraèdre. I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [AC],[BD], [AD] et [BC].
a) Montrer que le quadrilatère INJM est un parallélogramme.
b) En déduire que [IJ] et [MN] ont le meême milieu O et que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$.
c) Démontrer que O est aussi le milieu de [KL].
d) Soit P le centre de gravité du triangle BCD.
Montrer que $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AP}$.
e) Préciser la position des points Q et R tels que $\overrightarrow{BO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{CO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CR}$.



Coordonnées dans l'espace

43 Dans un repère de l'espace $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, soient les points A(1 ;−3 ;2) ; B(1 ;−5 ;0) ; C(1 ;0 ;1) et D(0 ;3 ;−4). 1°) Marquer ces points dans un repère.
2°) Calculer les coordonnées du point I milieu de [AB].
3°) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.
4°) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont-ils colinéaires ?
5°) Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
6°) Calculer la distance AB.
7°) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont-ils orthogonaux ?
8°) Donner l'équation du plan perpendiculaire à l'axe des ordonnées et passant par D.
9°) Tracer le plan d'équation z=2.

Symétries et translations

1 On donne un vecteur $\overrightarrow{u}$, un point I et une droite Δ.
Construire un cercle (C) de centre O et de rayon 4 cm.
Construire un triangle ABC inscrit dans ce cercle.
On note (F) la figure obtenue.

1°) Construire (F_1) image de (F) par la translation $t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$.

2°) Construire (F_2) image de (F) par la symétrie centrale de centre I.

3°) Construire (F_3) image de (F) par la symétrie orthogonale d'axe Δ.

4°) Construire (F_4) image de (F) par la rotation de centre I, d'angle $+\dfrac{\pi}{3}$.

2 (C) est un cercle dr centre O, de diamètre [AB]. M est un point de ce cercle distinct de A et de B.
A', B' et M' seont les images de A, B et M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OM}$.

a) Quelle est la nature du triangle A'M'B' ?

b) Que représente M pour ce triangle ?

3 ABC est un triangle. M, N et R sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].
P est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BN}$.
Q est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

Démontrer que les points R, N, Q et P sont alignés.

4 Deux cercles C_1 et C_2 de centre O_1 et O_2, de même rayons, sont sécants en A et B.
La parallèle Δ à (O_1O_2) passant par A recoupe C_1 en M_1 et C_2 en M_2.

1°) Démontrer que les quadrilatères $O_1M_1AO_2$ et $O_2O_1AM_2$ sont des parallélogrammes.

2°) Existe-t-il des positions particulières des cercles C_1 et C_2 pour lesquelles ces quadrilatères sont des losanges ?

5 ABCD est un parallélogramme de centre O. Une droite Δ qui passe par A coupe (BC) en E.
La parallèle à Δ passant par C coupe (AD)en F.

a) Quelle est l'image de Δ par la symétrie de centre O ?

b) Quelle est l'image de E par la symétrie de centre O ?

c) En déduire que le quadrilatère BEDF est un parallélogramme.

6 ABCD est un trapèze inscrit dans un cercle et tel que (AB)//(CD).
a) Montrer que les segments [AB] et [DC] ont la même médiatrice (d).

b) Montrer que le trapèze ABCD est isocèle.

c) (AD) et (BC) se coupent en I. (AC) et (BD) se coupent en J.

Montrer que O, I et J sont alignés.

7 Soit (D) une droite. O et A sont deux points de cette droite.
Une droite (Δ) coupe la droite (D) en A.
Soit A' le symétrique de A par rapport à O
Soit (Δ') la droite symétrique de Δ par rapport à O.
Le point O se projette orthogonalement en H sur (Δ) et en H' sur (Δ').

Démontrer que H' est le symétrique de H par rapport à O.

8 Soit ABCD un parallélogramme et I un point intérieur à ce parallélogramme.
Soit J le symétrique de I par rapport au point A.
Soit K le symétrique de J par rapport au point B.
Soit L le symétrique de K par rapport au point C.

Démontrer que I est le symétrique de L par rapport à D.(On utilisera le théorème des milieux avec les triangles JKL puis JIL).

9 Soit ABC un triangle. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et t' la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$
A'B'C' est l'image du triangle ABC par la translation t. A"B"C" est l'image du triangle ABC par la translation t'.

Démontrer que C est le milieu de [A"C'].

10 $(D($ est la médiatrice d'un segment [BC].
A et M sont deux points distincts de la droite (D).
Les droites (MC) et (AB) se coupent en N.
Les droites (MB) et (AC) se coupent en P.

Démontrer que N et P sont symétriques par rapport à (D), que (NP)⊥(AM) et que AN=AP.

11 ABC est un triangle dont les médianes [BB'] et [CC'] ont la même longueur.
G est le centre de gravité du triangle ABC.

a) Démontrer que la médiatrice (d) de [BC] passe par G et que B' et C' sont symétriques par rapport à (d).

b) Qu'en résulte-t-il pour le triangle ABC ?

12 (d) est une droite et s est la réflexion d'axe (d).
A et B sont deux points.
(Δ) est une droite passant par A.

a) Construire l'image (Δ') de (Δ) par s.

b) Comment choisir (Δ) pour que (Δ') passe par B ?

13 d_1 et d_2 sont deux droites perpendiculaires.
s_1 et s_2 sont les réflexions d'axe d_1 et d_2.
A et B sont deux points.
(D) est une droite passant par A.

a) Construire les images D_1 et D_2 de (D) par s_1 et s_2.

b) Comment choisir (D) pour que D_2 passe par B ?

14 ABC est un triangle isocèle avec AB=AC.
A l'extérieur de ce triangle, on construit les triangles équilatéraux ABC' et ACB'.
Les droites (CC') et (BB') se coupent en I.
Les droites (CB') et (BC') se coupent en J

a) Démontrer que C' et B' sont symétriques par rapport à la médiatrice (d) de [BC].

b) En déduire que les points A, I et J sont alignés.

Les rotations

15 Soit [AB] un segment.
Où sont situés les centres des rotations qui transforment A en B ?

16 Soit (D) une droite et O un point extérieur à cette droite.

a) Construire l'image de (D) par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$.

b) Construire l'image de (D) par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

17 Soit ABC un triangle. Soit A' un point distinct de A.
Soit O un point de la médiatrice de [AA'].
Soit r la rotation de centre O qui transforme A en A'.

Tracer l'image du triangle ABC par cette rotation.

18 Soit A et B deux points distincts.

a) Construire le centre O de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme A en B.

b) Construire le centre O' de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ qui transforme A en B.

21 Soit (C) un cercle et A un point n'appartenant pas à ce cercle.
A tout point M de (C), on associe le point M' tel que le triangle AMM' soit équilatéral avec $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})=-\dfrac{\pi}{3}$.

Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit (C) ?

22 Soit r le quart de tour direct de centre O.
a est un réel strictement positif.
Soit M' l'image de M par r.

Quel est l'ensemble des points M tels que MM'=a ?

23 Soit ABC un triangle de sens direct et H son orthocentre.
Soit ABD un triangle rectangle isocèle en A avec $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\dfrac{\pi}{2}$.
Soit ACE un triangle rectangle isocèle en A avec $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})=-\dfrac{\pi}{2}$.
Soit F le symétrique de E par rapport à A.

Démontrer que (FD)//(AH) et que (AH) est la médiatrice du triangle AED.

24 Soit ABC un triangle. A l'extérieur de ce triangle, on construit les triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC'.

a) Démontrer que BB'=CC' et que $(\overrightarrow{C'C},\overrightarrow{BB'})=\dfrac{\pi}{3}$.

b) Démontrer que AA'=BB'=CC' et que $(\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{BB'})=(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{CC'})=(\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'})=-\dfrac{2\pi}{3}$.

25 Soit ABCD un carré tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=-\dfrac{\pi}{2}$.
Soit M un point du segment [BC] distinct de C.
Le cercle circonscrit au triangle AMC recoupe (CD) en M'.
O est le centre de ce cercle.

a) Montrer que AOM est rectangle isocèle.

b) Démontrer que DM'=BM.

26 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{2}$.
Soit M un point de [AB] et N un point de [AC] tels que BM=CN.

a) Déterminer le centre O et l'angle de la rotation r telle que r(B)=C et r(M)=N.

b) Prouver que O appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

27 Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{3}$.
Soit E le symétrique de A par rapport à C ; soit D celui de B par rapport à C.

a) Déterminer le centre I et l'angle α_1 de la rotation r_1 telle que r_1(A)=C et r_1(B)=D.

b) Déterminer le centre J et l'angle α_2 de la rotation r_2 telle que r_2(A)=C et r_2(B)=E.

c) Montrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle JAC.

28. Soit OAB un triangle rectangle isocèle en O tel que OA=5 cm.
La rotation de centre O qui transforme A en B transforme B en C et C en D.

1°) Démontrer que O est le milieu des segments [AC] et [BD].

2°) Calculer les longueurs des segments [AB] et [BC].

3°) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

29 Soit ADC et ABE deux triangles rectangles et isocèles en A.
Soit M le milieu du segment [DE] et H le point d'intersection des droites (AM) et (BC).

1°) Quelle est l'image de E par la rotation de centre A qui transforme C en D ?

2°) Construire les points F et M', images respectives de D et M par cette rotation.

3°) Démontrer que A est le milieu du segment [CF].

4°) Démontrer que la droite (AM') est parallèle à la droite (BC).

5°) En déduire que la droite (AH) est une hauteur du triangle ABC.

30 Soit ABC un triangle isocèle avec AB=AC et D un point extérieur à ce triangle.

1°) Construire le point E image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

2°) Construire l'image F de D par la rotation de centre A qui transforme B en C.

3°) Démontrer que le triangle CEF est isocèle.

Homothéties

31 Soit ABC un triangle.

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k=$-\dfrac{3}{2}$.

1°) Construire les points A'=h(A), B'=h(B) et C'=h(C).

2°) Construire le centre de gravité dutriangle ABC.

3°) Construire le point G'=h(G).

4°) Démontrer que G' est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

32 Soit Ω, A et B trois points alignés.
Soit M un point n'appartenant pas à (Ω A) et N un point appartenant à (ΩA).
Soit h l'homothétie de centre Ω telle que h(B)=A.

Construire les points M'=h(M) et N'=h(N).

33 Soit ABCD un quadrilatère.
Soit M, N, P et Q les points tels que :
$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AD}$

En utilisant les homothéties h_1(A ;2) et h_2(C ;2), montrer que MNPQ est un parallélogramme.

34 On considère quatre droites distinctes D, D', Δ et Δ' telles que D//D' et Δ//Δ'.
A est un point de D n'appartenant pas à Δ.
A' est un point de Δ' n'appartenant pas à D'.
On admet qu'il existe une homothétie h telle que h(A)=A', h(D)=D' et h(Δ)=Δ'.

Construire le centre Ω de cette homothétie.

35 Soit A et B deux points distincts.
Soit f l'applicatuion qui à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que :
$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{0}$.

a) Déterminer le point invariant I de f.

b) En déduire la nature de l'application f.

36 Soit A un point fixe.
Soit (D) une droite ne passant pas par A.
A tout point M de (D), on associe le point M' défini par :
$\overrightarrow{AM'} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.
Quel est l'ensemble des points M' quand M décrit (D) ?

37 On considère un triangle ABC et sa médiane [AA'].
Par un point P de [AA'], on trace la parallèle à (AB) qui coupe (BC) en Q et la parallèle à (AC) qui coupe (BC) en R.

Démontrer que A' est le milieu de [QR].

38 Les sommets B et C d'un triangle sont fixes et le point A décrit un cercle (C).

1°) Quels sont les ensembles (C_1) et (C_2) des milieux I et J de[BA] et [CA] ?

2°) Quelle est l'application qui à I associe J ?

3°) Quel est l'ensemble des centres de gravité des triangles ABC ?

39 Soit ABC un triangle.
On constuit extérieurement au triangle, un carré BCDE.
Les droites (AD) et (AE) coupent (BC) respectivement en P et en Q.
Les perpendiculaires à (BC) passant par P et Q coupent respectivement (AC) en R et (AB) en S.
On dit que le quadrilatère PQRS est inscrit dans le triangle ABC.
1°) En utilisant une homothétie de centre A, déterminer la nature du quadrilatère PQRS.
2°) Construire les carrés inscrits dans le triangle ABC.

40 Soit ABC un triangle.
A', B' et C' sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].
I, J et K sont les milieux respectifs de [B'C'), [A'C'] et [A'B'].

Déterminer l'homothétie qui transforme A, B et C en I, J et K.

41 (C) est un cercle de centre O, de diamètre [BC].
A est un point de ce cercle.
La droite (AB) coupe en D la parallèle à (OA) passant par C.

En utilisant une homothétie, montrer que le triangle BCD est isocèle.

42 Soit [AB] un segment de milieu O.
M est un point n'appartenant pas à la droite (AB).
C est le symétrique de A par rapport à M.
Les droites (BM) et (OC) se coupent en H.
P est le milieu de [BC].

a) Préciser l'homothétie de centre A qui transforme M en C.

b) Préciser l'homothétie de centre B qui transforme M en H.

c) On suppose que M se déplace sur une droite fixe Δ. Sur quelle ligne se déplace le point C ? le point H ? le point P ?

43 (C) et (C') sont deux cercles de centre O et O' et de rayon R et R'.

On suppose que R'=2R et OO'=$\frac{9}{2}$R.

h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k qui transforme (C) en (C').

a) Pourqoi a-t-on k=2 ou k=-2 ?

b) Trouver le centre Ω de h.(Deux solutions).

44 (d) et (d') sont deux droites sécantes en O.
(D) est une droite sécante en A à (d) et en A' à(d').
Une droite Δ parallèle à (D) coupe (d) en B et (d') en B'.
J est le milieu de [BB'].

Démontrer que O,I et J sont alignés.

Lieux géométriques

45 (D) et (D') sont deux droites parallèles.

Placer le centre d'une homothétie de rapport $\frac{3}{2}$ qui transforme (D) en (D').

Quel est l'ensemble des centres des homothéties de rapport $\frac{3}{2}$ qui transforme (D) en (D') ?

46 B et D sont deux points donnés.
(C) est un cercle donné de centre D et de rayon r.
A est un point qui décrit (C).
C est le point tel que ABCD soit un parallélogramme.

Quels sont les lieux géométriques des points E et C lorsque A décrit (C) ?

47 M est un point quelconque du segment [AB].
On construit d'un même côté de (AB) les triangles équilatéraux AME et BMF.
Les droites (AE) et (BF) se coupent en C.

a) Démontrer que MFCE est un parallélogramme.

b) Déterminer le lieu géométrique du milieu I de [EF] lorsque M décrit le segemnt [AB].

48 O et O' sont deux points distincts.
Δ est une droite donnée non parallèle à (OO').
M est un point quelconque de Δ.
(C) et (C') sont les cercles de centre O et O' qui passent par M.
M' désigne le second point commun à (C) et (C').

Quel est le lieu géométrique des points M' lorsque M décrit Δ ?

49 AB et C sont trois points non alignés.
G est le centre de gravité du triangle ABC.
Δ est une droite.
M est un point qui décrit Δ.

Quel est l'ensemble des points M tel que :
$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$?